COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Determinare le classi di coniugio del gruppo alterno A_4. Verificare che la cardinalità di ogni classe divide $\#A_4 = 12$.

2. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi, cioè tali che $I + J = R$. Dimostrare che $IJ = I \cap J$.

3. Sia H il sottogruppo $\{\pm 1\}$ di $\mathbf{C}^*$. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{C}^*/H$ è isomorfo a $\mathbf{C}^*$.

4. Sia R l'anello $\mathbf{Z}_5[X]/(X^3 - 1)$. In quanti punti consiste $\mathrm{Spec}(R)$?

5. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{80}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{3}$. Sia x la classe laterale $\overline{13}H$. Determinare l'ordine dell'elemento x di $\mathbf{Z}_{80}^*/H$.

6. Determinare il grado del campo di spezzamento di $X^{13} - 2$ su $\mathbf{F}_3$.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 6 del foglio 3.

2. Questo è l'esercizio 10 (a) del foglio 7.

3. Sia $f : \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ l'applicazione data da $f(z) = z^2$. Poiché ogni elemento di $\mathbf{C}^*$ ha una radice quadrata in $\mathbf{C}^*$, l'omomorfismo f è suriettivo. Il nucleo di f è $\{\pm 1\}$. Per il Teorema dell'isomorfismo i gruppi $\mathbf{C}^*/\{\pm 1\}$ e $\mathbf{C}^*$ sono quindi isomorfi.

4. Gli ideali primi di $\mathbf{Z}_5[X]/(X^3 - 1)$ hanno la forma $\mathfrak{p}/(X^3 - 1)$ dove $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $\mathbf{Z}_5[X]$ che contiene $X^3 - 1$. Poiché $\mathbf{Z}_5[X]$ è un PID, gli ideali $\mathfrak{p}$ hanno la forma (g) con g un divisore monico irriducibile di $X^3 - 1$ in $\mathbf{Z}_5[X]$. In $\mathbf{Z}_5[X]$ abbiamo che $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$. Sia $X - 1$ che $X^2 + X + 1$ è irriducibile in $\mathbf{Z}_5[X]$. Ci sono quindi due possibilità per g e $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_5[X]/(X^3 - 1))$ ha due punti.

5. Poiché $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{80}$, abbiamo che $H = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{9}, \overline{27}\}$. Dal fatto che $13^2 = 169 \equiv 9 \pmod{80}$ segue che $\overline{13}^2 \in H$. Poichè $\overline{13} \notin H$ l'ordine di $\overline{13}$ in $\mathbf{Z}_{80}^*/H$ è uguale a 2.

6. Sia k un campo di spezzamento di $X^{13} - 2$ e sia $a \in k$ uno zero di $X^{13} - 2$. Si ha che $a^{13} = 2 = -1$ e quindi $a^{26} = 1$. L'ordine di a nel gruppo k^* divide 26. Se fosse $a^{13} = 1$, allora $1 = -1$ in $\mathbf{F}_3$ e quindi $2 \equiv 0$ in $\mathbf{F}_3$. Contraddizione.
   L'ordine di a è quindi 2 oppure 26. L'unico elemento di ordine 2 è $a = -1$. Infatti, $a = -1$ è uno zero di $X^{13} - 2$. Lo zero $a = -1$ non essendo zero del polinomio derivato, non è uno zero doppio. Gli altri zeri hanno quindi ordine 26 in k^*. Sia d il grado $[k : \mathbf{F}_3]$. Allora d è il più piccolo intero positivo tale che $\mathbf{F}_{3^d}^*$ contiene un elemento, o equivalentemente tutti gli elementi di ordine 26. In altre parole, d è il più piccolo intero positivo tale che 26 divide $3^d - 1$. Questo implica $d = 3$.