COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Dimostrare che un gruppo di cardinalità 105 non può essere semplice.

2. Dimostrare che un gruppo finito che possiede solo due classi di coniugio, è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$.

3. Sia H il sottogruppo $\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{Z}_5^*\}$ di $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_5)$.
   (a) Dimostrare che H è un sottogruppo normale e calcolare la cardinalità del gruppo quoziente $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}_5) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_5)/H$.
   (b) Calcolare l'ordine della classe dell'elemento $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}_5)$.

4. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali coprimi, vale a dire $I + J = R$. Dimostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha che $I^m + J^m = R$.

5. Sia $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ il sottoanello di $\mathbf{R}$ dato da $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Z}\}$. Determinare la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]/(7)$.

6. Determinare il grado del campo di spezzamento di $X^6 - 2$ su $\mathbf{F}_5$.

Soluzioni.

1. Se G fosse semplice, allora i sottogruppi di Sylow non sarebbero normali. Per i teoremi di Sylow i 7-gruppi di Sylow sarebbero quindi 15 e i 5-gruppi di Sylow 21. Poiché l'ordine di ogni sottogruppo di Sylow di G è primo, due sottogruppi di Sylow distinti hanno sempre intersezione banale. Ci sarebbero quindi $15(7-1) + 21(5-1) = 174$ elementi non banali nella unione dei 5-sottogruppi e i 7-sottogruppi di Sylow. E questo è assurdo.

2. (a) Si veda l'esercizo 8 del foglio 1. La cardinalità di $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}_5)$ è uguale a $\#\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}_5) = (5^2-1)(5^2-5)$ diviso per $\#H = 5 - 1$, pertanto è uguale a 120. (b) Osserviamo che il quadrato di $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ è uguale a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, che appartiene ad H. L'ordine richiesto è quindi 2.

3. Questo è l'esercizio 4 (a) del foglio 5.

4. Questo è l'esercizio 9 del foglio 7.

5. L'anello $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]/(7)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_7[X]/(X^2-2)$. Poiché $X^2 - 2 = (X-3)(X+3)$ in $\mathbf{Z}_7[X]$, il teorema cinese del resto implica che $\mathbf{Z}_7[X]/(X^2-2)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_7 \times \mathbf{Z}_7$. Il gruppo degli elementi invertibili è quindi isomorfo a $\mathbf{Z}_7^* \times \mathbf{Z}_7^*$ ed ha cardinalità 36.

6. Sia $a \in \overline{\mathbf{F}}_5$ uno zero di $X^6 - 2$. Allora si ha che $a^{24} = 2^4 = 1$. Questo implica che $a^{25} = a$. Questo vuol dire che a appartiene al sottocampo $\mathbf{F}_{25}$ di $\overline{\mathbf{F}}_5$. Il campo di spezzamento è quindi contenuto in $\mathbf{F}_{25}$. Abbiamo uguaglianza perché $X^6 - 2$ non ha zeri in $\mathbf{Z}_5$. Il grado richiesto è uguale a 2.