COGNOME

NOME

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Sia $\sigma \in S_7$ la trasposizione che scambia 1 e 2. Sia $\tau = (4325)(16)$. Scrivere $\sigma\tau$ come prodotto di cicli disgiunti a calcolare il segno di $\sigma\tau$.
2. Scrivere il polinomio $X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$.
3. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ un sottogruppo normale. Dimostrare che se $\#H = 2$, allora H è contenuto nel centro di G .
4. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X, Y]$ l'ideale generato da $X^2 - Y, Y - 1$ e 3. Calcolare la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili del anello quoziente $\mathbf{Z}[X, Y]/I$.
5. Quanti omomorfismi dal gruppo simmetrico S_3 al gruppo $\mathbf{Z}_4$ ci sono? Spiegare la risposta.

Soluzioni.

1. Si ha che $\sigma\tau = (12)(4325)(16) = (162543)$. Poiché il segno di un k -ciclo è $(-1)^{k+1}$, il segno del 6-ciclo $\sigma\tau$ è -1 .
2. Questo è il primo esercizio del foglio 14. La risposta è $s_2^2 - 2s_1s_3$.
3. Questo è l'esercizio 6 del foglio 12. Sia $H = \{e, h\}$. Il centro contiene certamente l'elemento neutro. Per vedere che $h \in Z(G)$, sia $g \in G$ arbitrario. Allora $ghg^{-1} \in H$. Se fosse $ghg^{-1} = e$, allora $h = e$. Contraddizione. Abbiamo quindi che $ghg^{-1} = h$ e quindi $gh = hg$. Questo fa vedere che $h \in Z(G)$.
4. Si ha che

$$\mathbf{Z}[X, Y]/(X^2 - Y, Y - 1, 3) \cong \mathbf{Z}_3[X, Y]/(X^2 - Y, Y - 1) \cong \mathbf{Z}_3[X]/(X^2 - 1).$$

Si ha che $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$. I due polinomi $X - 1, X + 1 \in \mathbf{Z}_3[X]$ sono coprimi, perché l'ideale $(X - 1, X + 1)$ contiene $1 = (X - 1) - (X + 1)$. Per il Teorema cinese del resto l'anello è quindi isomorfo a $\mathbf{Z}_3[X]/(X - 1) \times \mathbf{Z}_3[X]/(X + 1) \cong \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$. Il gruppo degli elementi invertibili è quindi isomorfo al gruppo $\mathbf{Z}_3^* \times \mathbf{Z}_3^*$, il quale ha quattro elementi.

5. Poiché $\mathbf{Z}_4$ è abeliano, ogni omomorfismo $S_3 \rightarrow \mathbf{Z}_4$ si fattorizza attraverso il quoziente $S_3/[S_3, S_3]$. Poiché $[S_3, S_3] = A_3$, il quoziente è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$. Basta quindi contare gli omomorfismi $f: \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_4$. Poiché $\bar{1} \in \mathbf{Z}_2$ ha ordine 2, l'ordine di $f(\bar{1}) \in \mathbf{Z}_4$ divide 2. Questo implica che $f(\bar{1})$ è contenuto nel sottogruppo $\{\bar{0}, \bar{2}\} \cong \mathbf{Z}_2$. Poiché ci sono esattamente due omomorfismi $\mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2$, ci sono quindi anche esattamente due omomorfismi $S_3 \rightarrow \mathbf{Z}_4$.