COGNOME

NOME

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Siano $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ed $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, per $k \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$, i numeri di Fibonacci. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

2. Determinare tutte le soluzioni intere $x \in \mathbf{Z}$ del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 6 \pmod{18}, \\ 5x \equiv 1 \pmod{7}. \end{cases}$$

3. Sia $G = \mathbf{Z}_{33}^*$ e sia H il sottogruppo generato da $\bar{4}$. Stabilire se il gruppo quoziente G/H è ciclico o meno.
4. Sia $\mathbf{Z}[X]$ l'anello dei polinomi con coefficienti in $\mathbf{Z}$ e sia $(2, X)$ l'ideale di $\mathbf{Z}[X]$ generato da 2 e X .
- (a) Dimostrare che la mappa $\Psi : \mathbf{Z}[X] \rightarrow \mathbf{Z}_2$ data da $\Psi(f) = f(0) \pmod{2}$ è un omomorfismo di anelli.
- (b) Dimostrare che Ψ è suriettivo e che $\ker(\Psi)$ è l'ideale $(2, X)$.
- (c) Dimostrare che l'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/(2, X)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$.
5. Un elemento x di un anello R si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per un $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$.
- (a) Determinare gli elementi nilpotenti dell'anello $\mathbf{Z}_{24}$.
- (b) Dimostrare che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo R formano un ideale.

Soluzioni.

1. Per $n = 1$ si ha che $F_1 = F_3 - 1$ perché $F_3 = 2$. Supponiamo che la formula sia giusta per un certo $n \geq 1$ e procediamo per induzione. Allora si ha che $F_1 + \dots + F_{n+1} = (F_1 + \dots + F_n) + F_{n+1} = (F_{n+2} - 1) + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$ e quindi la formula vale anche per $n + 1$. Concludiamo che la formula vale per ogni $n \geq 1$.
2. Se $x \in \mathbf{Z}$ soddisfa la prima congruenza, si ha che $3x = 6 + 18k$ per un certo $k \in \mathbf{Z}$ e quindi che $x = 2 + 6k$. Sostituendo $x = 2 + 6k$ nella seconda equazione, troviamo che $5(2 + 6k) \equiv 1 \pmod{7}$ e quindi che $2k \equiv -2 \pmod{7}$. Moltiplicando per l'inverso di $2 \in \mathbf{Z}_7^*$ vediamo che $k \equiv -1 \pmod{7}$ e quindi $k = -1 + 7m$ per un certo $m \in \mathbf{Z}$. Sostituendo questo nella equazione $x = 2 + 6k$ troviamo che $x = 2 + 6(-1 + 7m) = -4 + 42m$ per un certo $m \in \mathbf{Z}$.
3. Si ha che $H = \{\bar{4}, \bar{16}, -\bar{2}, -\bar{8}, \bar{1}\}$ e quindi $\#H = 5$. Il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{33}^*/H$ ha quindi $\varphi(33)/5 = 2 \cdot 10/5 = 4$ elementi. Per vedere che $\mathbf{Z}_{33}^*/H$ non è ciclico, si osserva che per il teorema cinese del resto il gruppo $\mathbf{Z}_{33}^*$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_{11}^* \times \mathbf{Z}_3^*$. Poiché $\#\mathbf{Z}_{11}^* = 10$ e $\#\mathbf{Z}_3^* = 2$, il teorema di Lagrange implica che ogni elemento (a, b) di $\mathbf{Z}_{11}^* \times \mathbf{Z}_3^*$ ha la proprietà che $(a, b)^{10} = (a^{10}, b^{10})$ è l'elemento neutro. La stessa cosa vale quindi per il gruppo $\mathbf{Z}_{33}^*$: per ogni $\bar{x} \in \mathbf{Z}_{33}^*$ si ha che $\bar{x}^{10} = \bar{1}$. In particolare, $\mathbf{Z}_{33}^*$ non contiene elementi di ordine 4. Il quoziente $\mathbf{Z}_{33}^*/H$ contiene quindi neanche elementi ordine 4. Concludiamo che il gruppo $\mathbf{Z}_{33}^*/H$ non è ciclico.
4. Questo è l'Esercizio 11 del foglio 9.
5. Gli elementi nilpotenti di $\mathbf{Z}_{24}$ sono $\bar{0}$, $\bar{6}$, $\bar{12}$ e $\bar{18}$. Per vedere che gli elementi nilpotenti di un anello commutativo R formano un ideale, si osserva che se $x \in R$ soddisfa $x^n = 0$ e se $\lambda \in R$ allora si ha che $(\lambda x)^n = 0$. Similmente se $x, y \in R$ soddisfano $x^n = 0$ e $y^m = 0$, allora il binomio di Newton implica che $(x + y)^{n+m} = 0$.