1. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{C}/\mathbf{R}$ è isomorfo a $\mathbf{R}$.
2. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{31}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{2}$.
   (a) Quanti elementi ha H? Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{31}^*/H$?
   (b) Dimostrare che $\mathbf{Z}_{31}^*/H$ è ciclico.
3. Sia $H \subset \mathbf{Z}_{24}^*$ il sottogruppo generato da $\overline{17}$. Dire se il gruppo quoziente $\mathbf{Z}_{24}^*/H$ è ciclico o meno.
4. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{R}^*/\{+1,-1\}$ è isomorfo a $\mathbf{R}_{>0}^*$ e quindi anche al gruppo additivo $\mathbf{R}$.
5. Sia $C \subset \mathbf{C}^*$ il sottogruppo $C = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Dimostrare che il gruppo quoziente $\mathbf{C}^*/C$ è isomorfo a $\mathbf{R}_{>0}^*$ e quindi anche al gruppo additivo $\mathbf{R}$.
6. Sia A un gruppo additivo e sia $G = \mathrm{Map}(\mathbf{Z}_{\geq 1}, A)$.
   (a) Dimostrare che con la composizione definita da $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ per $f, g \in G$ e $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, l'insieme G è un gruppo commutativo.
   (b) Sia $B = \{(a_1, a_2, \ldots) : a_i \in A \text{ per ogni } i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}\}$. Allora B è un gruppo con addizione coordinata per coordinata. Esibire un isomorfismo ϕ da B al gruppo G della parte (a).
   (c) Dimostrare che $C = \{(a_1, a_2, \ldots) \in B : a_i = 0 \text{ eccetto per un numero finito di indici } i.\}$ è un sottogruppo del gruppo B della parte (b).
7. Per i campi $F = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ scriviamo F^{*2} per l'insieme $\{x^2 : x \in F^*\}$.
   (a) Dimostrare che F^{*2} è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo F^*.
   (b) Dimostrare che il quoziente $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2}$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$. Dimostrare che $\mathbf{C}^*/\mathbf{C}^{*2}$ è il gruppo banale.
   (c) Dimostrare che $\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^{*2}$ è isomorfo al gruppo C con $A = \mathbf{Z}_2$ della parte (c) dell'Esercizio 6.
8. Sia p un numero primo. Consideriamo il gruppo additivo $A = \mathbf{Z}_{p^3} \times \mathbf{Z}_p$. Sia $f : A \longrightarrow A$ la mappa data da
   $$f(a) \;=\; p^2 a \;=\; \underbrace{a + a + \ldots + a}_{p^2 \text{ volte}}, \qquad \text{per } a \in A.$$
   (a) Dimostrare che f è un omomorfismo.
   (b) Dimostrare che $\mathrm{im}\, f \subset \ker f$.
   (c) Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\ker f/\mathrm{im}\, f$?
9. Sia G un gruppo commutativo e siano H_1 e H_2 due sottogruppi di G.
   (a) Dimostrare che il sottoinsieme $H_1H_2 = \{h_1h_2 : h_1 \in H_1 \text{ e } h_2 \in H_2\}$ è un sottogruppo di G che contiene sia H_1 che H_2.
   (b) Sia f la composizione
   $$H_1 \xrightarrow{\subset} H_1H_2 \xrightarrow{\text{can}} H_1H_2/H_2.$$
   Dimostrare che f è un omomorfismo e determinare il nucleo e l'immagine di f.
   (c) Dedurre dalla parte (b) l'esistenza di un isomorfismo
   $$H_1/H_1 \cap H_2 \;\cong\; H_1H_2/H_2.$$
10. *(Teorema dell'omomorfismo)* Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi abeliani. Sia N un sottogruppo di $\ker(f)$. Dimostrare che la mappa $\overline{f} : G/N \longrightarrow H$ data da $\overline{f}(\overline{g}) = f(g)$ è un omomorfismo ben definito. Qui abbiamo scritto $\overline{g}$ per la classe laterale gH di g.