

1. Determinare quali sottoinsiemi sono sottogruppi:
 - (a) $\mathbf{Q}_{>0} \subset \mathbf{Q}^*$,
 - (b) $\{x \in \mathbf{R} : x > 1\} \subset \mathbf{R}^*$,
 - (c) $\{\pm 1, \pm i\} \subset \mathbf{C}^*$,
 - (d) $\{\bar{x} \in \mathbf{Z}_n^* : x \equiv 1 \pmod{d}\} \subset \mathbf{Z}_n^*$ per d un divisore di $n \in \mathbf{Z}_{>0}$,
 - (e) $D_d \subset D_n$ per d un divisore di $n \in \mathbf{Z}_{>0}$,
 - (f) $\{x \in \mathbf{Q}^* : \text{esistono } a, b \in \mathbf{Q} \text{ tali che } x = a^2 + b^2\} \subset \mathbf{Q}^*$.
2. Dimostrare che un sottogruppo di un gruppo abeliano è abeliano. Dare un esempio di un gruppo non abeliano con sottogruppo abeliano non banale.
3. Siano G, G' gruppi e sia $f : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo. Dimostrare
 - (a) Se H è un sottogruppo di G allora $f(H) = \{f(h) : h \in H\}$ è un sottogruppo di G' .
 - (b) Se H è un sottogruppo di G' allora $f^{-1}(H) = \{h \in G : f(h) \in H\}$ è un sottogruppo di G .
4. Sia G un gruppo *finito* e sia $H \subset G$. Provare: se $H \neq \emptyset$ e se $ab \in H$ per ogni $a, b \in H$, allora H è un sottogruppo di G .
5. Sia G un gruppo e sia $g \in G$.
 - (a) Dimostrare che l'applicazione data da $x \mapsto gxg^{-1}$ è un endomorfismo di G .
 - (b) Sia $H \subset G$ un sottogruppo. Dimostrare che $gHg^{-1} = \{gxg^{-1} : x \in H\}$ è un sottogruppo di G .
6. (a) Sia G un gruppo e sia $\{H_\alpha : \alpha \in A\}$ una famiglia di sottogruppi di G . Dimostrare che $\bigcap_\alpha H_\alpha = \{h : h \in H_\alpha \text{ per ogni } \alpha \in A\}$ è un sottogruppo di G .
 (b) Sia G un gruppo e siano $H \subset G$ e $H' \subset G$ due sottogruppi. Dimostrare: se $G = H \cup H'$ allora $G = H$ oppure $G = H'$.
 (c) Provare che il gruppo $G = \mathbf{Z}_{12}^*$ ha tre sottogruppi H_1, H_2 e H_3 diversi da G ma con $H_1 \cup H_2 \cup H_3 = G$.
7. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono omomorfismi:
 - (a) $\mathbf{R}^* \longrightarrow \mathbf{R}^* \quad x \mapsto |x|,$
 - (b) $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \quad x \pmod{10} \mapsto x \pmod{5},$
 - (c) $(\mathbf{Z}/10\mathbf{Z})^* \longrightarrow (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^* \quad x \pmod{10} \mapsto x \pmod{5},$
 - (d) $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}^* \quad x \mapsto \cos(x) + \text{sen}(x)i,$
 - (e) $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \longrightarrow (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^* \quad x \mapsto 2^x.$
 - (f) $\mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{R}^* \quad a + bi \mapsto a^2 + b^2,$
 Quali sono iniettive e quali suriettive? Determinare i nuclei e le immagini.
8. Sia G un gruppo. Dimostrare che l'applicazione $F : G \longrightarrow G$ data da $F(x) = x^2$ è un omomorfismo se e soltanto se G è abeliano. Dimostrare che l'applicazione $x \mapsto x^{-1}$ è un omomorfismo se e soltanto se G è abeliano.
9. (a) Siano G_1 e G_2 due gruppi con un solo elemento. Dimostrare che G_1 e G_2 sono isomorfi.
 (b) Come (a), ma G_1 e G_2 hanno due elementi.
 (c) È anche vero quando G_1 e G_2 hanno tre elementi? quattro elementi?
10. Provare che

$$(\mathbf{Z}_{12})^* \cong D_2 \cong P(X)$$

dove $P(X)$ è l'insieme delle parti di $X = \{0, 1\}$ con composizione la differenza simmetrica.

11. Sia G un gruppo e siano H e H' due sottogruppi con le seguenti proprietà:
 - $hh' = h'h$ per ogni $h \in H, h' \in H'$,
 - $H \cap H' = \{e\}$,
 - Per ogni $g \in G$ ci sono $h \in H$ e $h' \in H'$ tali che $g = hh'$.
 Dimostrare che l'applicazione

$$f : H \times H' \longrightarrow G$$

data da $f(h, h') = hh'$ è un isomorfismo.

12. Utilizzare l'Esercizio 11 e dimostrare che

$$\mathbf{R}^* \cong \mathbf{R}_{>0} \times \{\pm 1\}.$$