1. Per i seguenti insiemi G e "composizioni" $\circ$, indicare, se esiste, un elemento neutro. Dire quando si tratta di un gruppo:
   (a) $G = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ con $a \circ b = a^b$.
   (b) $G = \mathbf{R}$ con $a \circ b = a + b + 3$,
   (c) $G = \mathbf{R}_{>1}$ con $a \circ b = a^{\log(b)}$.
   (d) $G = \{-1, 0, 1\}$ con $a \circ b = a + b$.
   (e) $G = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ con $a \circ b = \max(a, b)$.
   (f) $G = \mathbf{R}^2$ con $\binom{a}{b} \circ \binom{c}{d} = \binom{c+ad}{bd}$.

2. (a) Sia G un gruppo e siano $a, b \in G$. Dimostrare che l'equazione
$$ax = b$$
   ha una unica soluzione $x \in G$. Questa soluzione è $x = a^{-1}b$. Similmente, dimostare che esiste una unica soluzione $x \in G$ di $xa = b$, vale a dire $x = ba^{-1}$.
   (b) Provare che, nella tabella di composizione di un gruppo finito, ogni elemento compare esattamente una volta in ogni riga ed ogni colonna.

3. Sia n un intero positivo e siano $a, b \in \mathbf{Z}$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   (a) $\overline{a} = \overline{b}$,
   (b) n divide $a - b$,
   (c) a e b hanno lo stesso resto della divisione per n,
   (d) $a \in \overline{b}$,
   (e) $b \in \overline{a}$,
   (f) $a \equiv b \pmod{n}$.

4. Sia X un insieme e sia $P(X)$ l'insieme delle parti di X. *La differenza simmetrica* $A \triangle B$ di due sottoinsiemi A e B di X è definito da
$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$
   Verificare che $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Dimostrare che $P(X)$ con la composizione $\triangle$ è un gruppo abeliano. Scrivere la tabella di composizione per un insieme X di due elementi.

5. Sia G un gruppo.
   (a) Provare: se $x^2 = 1$ per ogni $x \in G$, allora G è commutativo.
   (b) Provare: se $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ per ogni $a, b \in G$, allora G è commutativo.
   (c) Provare: se $a^2b^2 = (ab)^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è commutativo.

6. Una trasformazione *affine* di $\mathbf{R}$ è una applicazione $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da
$$x \mapsto ax + b$$
   con $a \in \mathbf{R}^*$ e $b \in \mathbf{R}$.
   (a) Dimostrare che le trasformazioni affini di $\mathbf{R}$ formano un gruppo con la composizione.
   (b) Si tratta di un gruppo commutativo?

7. Sia G un gruppo e sia X un insieme. Sia G^X l'insieme delle mappe $X \longrightarrow G$. Siano $f, g \in G^X$. Definiamo $f \circ g$ nel modo seguente:
$$(f \circ g)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{per } x \in X.$$
   (a) Dimostrare che G^X è un gruppo rispetto alla composizione $\circ$.
   (b) Dimostrare che G^X è commutativo se e soltanto se G è commutativo.

8. (a) Dimostrare che l'insieme $\{+1, -1\} \subset \mathbf{R}^*$ è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $\mathbf{R}^*$.
   (b) Dimostrare che l'insieme $\{+1, -1, +i, -i\} \subset \mathbf{C}^*$ è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $\mathbf{C}^*$
   (c) Dimostrare che $\zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbf{C}$ soddisfa $\zeta^8 = 1$. Dimostrare che le potenze di ζ formano un gruppo moltiplicativo. Quanti elementi ha questo gruppo?

9. Dimostrare che ci sono esattamente 48 trasformazioni isometriche dello spazio $\mathbf{R}^3$ che trasformano un dato cubo in se stesso.
   (a) Dimostrare che queste trasformazioni formano un gruppo.
   (b) Quante trasformazioni isometriche di $\mathbf{R}^3$ trasformano un icosaedro regolare in se stesso?