

1. Per le seguenti relazioni R di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ stabilire quali sono simmetriche, riflessive o transitive.
 - (a) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n = m\}$;
 - (b) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : |n - m| = 5\}$;
 - (c) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n \geq m\}$;
 - (d) $R = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n^2 \equiv m^2 \pmod{7}\}$.
2. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
 - (a) Esibire una relazione su di X , che sia riflessiva, simmetrica, ma non transitiva.
 - (b) Esibire una relazione su di X , che sia simmetrica, transitiva ma non riflessiva.
 - (c) Esibire una relazione su di X , che sia riflessiva, transitiva, ma non simmetrica.
3. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
 - (i) Consideriamo su X la relazione: xRy se $x + y$ è un numero pari. Dimostrare che R è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza corrispondenti.
 - (ii) Consideriamo su X la relazione: $xR'y$ se $x + y$ è un numero dispari. Determinare se R' è una relazione di equivalenza.
4. Sia $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : a + d = b + c\}$.
 - (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
 - (b) Sia $\tilde{A}$ = l'insieme delle classi di equivalenza di R . Dimostrare che la mappa $f : \tilde{A} \longrightarrow \mathbf{Z}$ che associa la differenza $a - b$ alla classe di (a, b) , è ben definita ed è una biezione.
5. Sia A un insieme di n elementi. Per $i = 0, 1, \dots, n$, sia $P_i \subset P(A)$ la collezione dei sottoinsiemi di A che possiedono esattamente i elementi.
 - (a) Dimostrare che gli insiemi P_i formano una partizione di $P(A)$.
 - (b) Esibire una relazione di equivalenza su $P(A)$ che induce la partizione della parte (a).
6. Quante relazioni di equivalenza distinte si possono definire sull'insieme $\{a, b, c, d\}$?
7. Con $P(A)$ indichiamo l'insieme delle parti di un insieme A . Sia $X = P(P(\emptyset))$. Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$. Disegnare il diagramma di Hasse.
8. L'insieme $\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$ è ordinato mediante $d \leq d'$ quando d divide d' . Disegnare il diagramma di Hasse di questo ordinamento.