1. Sia R un anello commutativo. Un elemento $e \in R$ si dice *idempotente* se $e^2 = e$.
   (a) Sia k un campo e sia $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Determinare gli elementi idempotenti dell'anello k^n.
   (b) Dimostrare che se $e \in R$ è idempotente, anche $1 - e$ è idempotente.
   (c) Dimostrare che l'insieme E degli elementi idempotenti di R formano un gruppo con l'operazione $e * f = (e - f)^2$ per $e, f \in E$.

2. Sia A un gruppo abeliano finito moltiplicativo e sia a il prodotto di tutti gli elementi di A.
   (a) Dimostrare che se A contiene un unico elemento b di ordine 2, allora $a = b$. Dimostrare che in caso contrario si ha che $a = 1$.
   (b) (Wilson) Sia p un primo. Dimostrare che $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3. Determinare $\#R^*$ per l'anello $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]/(3)$. Stessa domanda per gli anelli $\mathbf{Z}[i]/(4)$ e $\mathbf{Z}_5[X]/(X^3 - 1)$.

4. Determinare le cardinalità dei seguenti anelli:
   (a) $\mathbf{Z}[X]/(X^3 + X + 1, X - 1, 3)$;
   (b) $\mathbf{Z}[X, Y]/(Y^2 - X, Y - 3X, X - 2)$;
   (c) $\mathbf{Z}_3[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2, Y - Z^3, X - Z)$;
   (d) $\mathbf{Z}[i]/(12 - i, 29)$.

5. Per le seguenti coppie di gruppi G e H, quanti omomorfismi $G \longrightarrow H$ ci sono?
   (a) $G = D_4$ e $H = \mathbf{Z}_8$;
   (b) $G = \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$ e $H = \mathbf{Z}_9$;
   (c) $G = S_3$ e $H = S_3$;
   (d) $G = D_4$ e $H = Q$.

6. Sia $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ e sia R l'anello dato da $R = \mathbf{Z}[X]/(nX, X^2)$. Determinare il gruppo R^* e verificare che $\#R^* = 2n$.

7. Sia G un gruppo finito e sia p il più piccolo divisore primo di $\#G$. Sia $H \subset G$ un sottogruppo di indice p. In questo esercizio dimostriamo che H è un sottogruppo normale.
   (a) La moltiplicazione a sinistra per $g \in G$ induce una permutazione delle classi laterali sinistre di H. Dimostrare che la mappa indotta $G \longrightarrow S_p$ è un omomorfismo di gruppi.
   (b) Dimostrare che l'immagine di f ha ordine p.
   (c) Dimostrare che $\ker(f) = H$ e dedurne che H è un sottogruppo normale di G.

8. Sia G un gruppo. Siano H e N due sottogruppi normali di G.
   (a) Dimostrare che $HN = \{hn : h \in H \text{ e } n \in N\}$ è un sottogruppo di G.
   (b) Dimostrare che se $H \cap N = \{e\}$, allora $hn = nh$ per ogni $h \in H$ e $n \in N$.
   (c) Dimostrare che se $H \cap N = \{e\}$, allora $HN \cong H \times N$.

9. Sia p un primo. Dimostrare che un gruppo di ordine p^2 è isomorfo a $\mathbf{Z}_{p^2}$ oppure $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$. (Sugg. usare gli esercizi 7 e 8).

10. Sia k un campo e sia $\mathrm{GL}_n(k)$ il gruppo moltiplicativo delle matrici invertibili con coefficienti in k.
    (a) Dimostrare che il determinante è un omomorfismo suriettivo $\mathrm{GL}_n(k) \longrightarrow k^*$. Il nucleo è indicato da $\mathrm{SL}_n(k)$.
    (b) Dimostrare che le matrici scalari formano un sottogruppo normale N di $\mathrm{GL}_n(k)$. Il quoziente è indicato da $\mathrm{PGL}_n(k)$.
    (c) Dimostrare che l'intersezione del sottogruppo normale N con $\mathrm{SL}_n(k)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{SL}_n(k)$. Il quoziente è indicato da $\mathrm{PSL}_n(k)$.

11. Sia p un primo e sia $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$. Determinare gli ordini dei gruppi $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p)$, $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{Z}_p)$ e $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{Z}_p)$.