1. Scrivere $X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2$ come polinomio nei polinomi simmetrici elementari $s_1, s_2, s_3 \in \mathbf{Z}[X, Y, Z]$. Stessa domanda per $XY^3 + YX^3 + XZ^3 + ZX^3 + ZY^3 + YZ^3$.

2. Siano α, β, γ gli zeri complessi del polinomio $X^3 + X + 1$. Determinare
$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

3. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7 \in \mathbf{C}$ tali che $X^7 + X + 2 = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_7)$.
   (a) Determinare $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7$;
   (b) Dimostrare che $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \cdots + \alpha_7^3 = 0$;
   (c) Determinare $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 + \cdots + \alpha_7^7$.

4. Siano α e β gli zeri del polinomio $X^2 - X - 1$.
   (a) Calcolare $F_k = (\alpha^k - \beta^k)/(\alpha - \beta)$ per $0 \le k \le 4$.
   (b) Dimostrare che F_k sta in $\mathbf{Z}$ per ogni $k \ge 0$.
   (c) Dimostare che $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ per ogni $k \ge 1$.

5. Sia $f \in \mathbf{Z}[X]$ un polinomio con zeri distinti in $\mathbf{C}$. Dimostrare che l'insieme dei numeri primi p con la proprietà che $f \pmod p$ ha uno zero di molteplicità ≥ 2, è finito.

6. Siano $a, b, c \in \mathbf{Z}$ e siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gli zeri complessi del polinomio $f = X^3+aX^2+bX+c \in \mathbf{Z}[X]$.
   (a) Determinare la funzione simmetrica $(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3)$ in termini dei coefficienti di f.
   (b) Determinare la funzione simmetrica $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)$ in termini dei coefficienti di f.
   (c) Determinare il polinomio monico $g \in \mathbf{Z}[X]$ che ha $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_3$ e $\alpha_1 + \alpha_3$ come zeri.

7. Sia $n \in \mathbf{Z}_{>0}$. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbf{Z}$ il discriminante del polinomio $X^n + a$ è uguale a $(-1)^{n(n-1)/2}n^n a^{n-1}$.

8. Sia R un anello commutativo. Una seria formale in X con coefficienti in R è un'espressione del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ con $a_k \in R$ per ogni $k \ge 0$. Se $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ e $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$, allora $f = g$ se e solo $a_k = b_k$ per ogni k. La somma di f e g è data da $f + g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ con $c_k = a_k + b_k$ per ogni k e il prodotto da $fg = \sum_{k=0}^{\infty} d_k X^k$ con $d_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ per ogni k.
   (a) Dimostrare che le serie formali con coefficienti in R formano un anello commutativo. Notazione: $R[[X]]$.
   (b) Dimostrare che l'anello dei polinomi $R[X]$ è un sottoanello di $R[[X]]$.
   (c) Sia $f = 1 + X + X^2 + X^3 + \ldots \in R[[X]]$. Dimostrare che $f(1 - X) = 1$ in $R[[X]]$.

9. (*Identità di Newton: http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_identities*)
   Siano $s_1, s_2, \ldots, s_n$ i polinomi simmetrici nell'anello $\mathbf{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. Per ogni $k \ge 0$ sia $p_k = X_1^k + X_2^k + \ldots + X_n^k$ la somma delle k-esime potenze.
   (a) Per ogni $k \in \{0, \ldots, n\}$ dimostrare l'identità
   $$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 + \ldots + (-1)^{k-1}p_1 s_{k-1} + (-1)^k k s_k = 0.$$
   (b) Per ogni $k \ge n$ dimostrare l'identità
   $$p_k - p_{k-1}s_1 + p_{k-2}s_2 + \ldots + (-1)^n p_{k-n} s_n = 0.$$
   (Sugg. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$. Calcolare la "derivata logaritmica" $F'(T)/F(T)$ del polinomio $F(T) = \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i T) \in R[T]$ in due modi e scrivere $1/(1 - X_i T)$ come una seria formale.)