1. Sia G un gruppo e siano H, H' due sottogruppi normali di G con la proprietà che G/H e G/H' sono abeliani. Dimostrare che $G/(H \cap H')$ è abeliano.
2. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che $\ker(f)$ è un sottogruppo normale di G. È vero o falso che l'immagine di f è sempre un sottogruppo normale di H?
3. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi e sia $N \subset H$ un sottogruppo normale di H. Dimostrare che $f^{-1}(N)$ è un sottogruppo normale di G e che la mappa $G/f^{-1}(N) \longrightarrow H/N$ definita da $f(\overline{g}) = f(g) \pmod{N}$ è un ismorfismo ben definito.
4. Sia $H \subset D_4$ il sottogruppo generato dalla riflessione T rispetto all'ascissa. Scrivere esplicitamente le classi laterali sinistre e destre di H. Dedurne che H non è un sottogruppo normale di D_4.
5. Esibire un gruppo G e due sottogruppi $H \subset H' \subset G$ tali che H è un sottogruppo normale di H' e H' è un sottogruppo normale di G, ma H non è un sottogruppo normale di G. (Sugg. esibire sottogruppi opportuni di $G = D_4$.)
6. Sia G un gruppo e sia $N \subset G$ un sottogruppo normale di cardinalità 2. Dimostrare che N è contenuto nel centro di G.
7. Determinare tutti gli omomorfismi $S_3 \longrightarrow \mathbf{Z}_6$. Stessa domanda per gli omomorfismi $\mathbf{Z}_6 \longrightarrow S_3$.
8. Determinare gli omomorfismi $D_4 \longrightarrow \mathbf{Z}_8$. Stessa domanda per gli omomorfismi $\mathbf{Z}_8 \longrightarrow D_4$.
9. Siano $n, m \geq 1$ a sia $f : S_n \longrightarrow S_m$ un omomorfismo. Dimostrare che $f(A_n) \subset A_m$.
10. (a) Dimostrare che il gruppo S_5 contiene un sottogruppo isomorfo a $\mathbf{Z}_6$;
    (b) È vero che S_5 contiene un sottogruppo isomorfo a D_6?
11. (a) Ecco il famoso puzzle di *Sam Loyd* (statunitense noto per i suoi rompicapo, 1841–1911). Ci sono 15 blocchetti, numerati da 1 a 15, in un telaio. Utilizzando l'unica posizione vuota, essi si possono spostare orizzontalmente o verticalmente. Lo scopo del gioco è di ordinare i blocchetti da 1 a 15 per righe. Far vedere che questo è *impossibile* a partire dalla configurazione rappresentata a destra.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

    (b) Lo stesso gioco come in (a). È incredibile, ma nonostante le affermazioni della parte (a) di questo esercizio, in Trentino sanno ordinare i blocchetti cominciando dalla configurazione rappresentata a destra. Come mai?

33	tren	tini	an
da	va	no	per
Trento	tut	ti	33
trot	do	tan	

12. Sia G un gruppo finito con la proprietà che $\mathrm{Aut}(G)$ è banale.
    (a) Dimostrare che G è abeliano;
    (b) Dimostrare che ogni elemento di G ha ordine ≤ 2;
    (c) Dimostrare che $\#G = 1$ oppure 2.