1. Sia σ il ciclo $(a_1\,a_2\,\ldots\,a_k)$. Dimostrare che $\sigma^{-1}=(a_k\,\ldots\,a_2\,a_1)$.

2. Esprimere le seguenti permutazioni in S_9 come prodotti di cicli disgiunti. Calcolare gli inversi.

$$\text{(a)}\quad \sigma:\begin{cases}1\mapsto 9, & 4\mapsto 1, \quad 7\mapsto 2,\\ 2\mapsto 7, & 5\mapsto 3, \quad 8\mapsto 5,\\ 3\mapsto 8, & 6\mapsto 4, \quad 9\mapsto 6.\end{cases}\qquad \text{(b)}\quad \tau:\begin{cases}1\mapsto 8, & 4\mapsto 6, \quad 7\mapsto 9,\\ 2\mapsto 2, & 5\mapsto 5, \quad 8\mapsto 1,\\ 3\mapsto 3, & 6\mapsto 4, \quad 9\mapsto 7.\end{cases}$$

3. Scrivere il seguente prodotto di permutazioni come prodotto di cicli disgiunti:

$$(1\,9\,6\,4\,3\,8\,7)(1\,3\,7\,4\,8\,6\,2)(2\,7\,1).$$

4. Calcolare il segno $\varepsilon(\sigma)$ per ogni $\sigma\in S_3$.

5. Siano $\sigma,\tau\in S_n$ due cicli disgiunti. Dimostrare che σ e τ commutano, cioè $\sigma\tau=\tau\sigma$.

6. Siano $\sigma,\tau\in S_n$.
   (a) Sia $a\in\{1,2,\ldots,n\}$ e sia $b=\tau(a)$. Far vedere che la permutazione $\sigma\tau\sigma^{-1}$ manda $\sigma(a)$ in $\sigma(b)$.
   (b) Se $\tau=(a_1\,a_2\,\ldots\,a_k)$ è un k-ciclo, allora $\sigma\tau\sigma^{-1}$ è il ciclo $(\sigma(a_1)\,\sigma(a_2)\,\ldots\,\sigma(a_k))$.
   (c) Dimostrare che se τ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $k_1,k_2,\ldots,k_t$, allora questo è vero anche per $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

7. Siano $\sigma,\tau\in S_n$. Dimostrare che se la permutazione $\sigma\tau$ è un prodotto di t cicli disgiunti di lunghezze $k_1,k_2,\ldots,k_t$, allora questo è vero anche per $\tau\sigma$.

8. Sia n un intero positivo e sia p un numero primo. Provare: se $\sigma\in S_n$ ha ordine p, allora σ è un prodotto di p-cicli disgiunti.

9. Sia $n\geq 2$. Dimostrare che S_n contiene un sottogruppo isomorfo a D_n.

10. (a) Trovare il più piccolo intero n tale che S_n contiene un elemento di ordine 6.
    (b) Esibire un intero $n\geq 1$ tale che S_n contiene un elemento di ordine maggiore di n^2.

11. Sia $n\geq 3$. Dimostrare che il centro di S_n è banale.

12. Dimostrare che per nessun $n\geq 3$ i gruppi S_n e $A_n\times\mathbf{Z}_2$ sono isomorfi.

13. Siano $k,n\in\mathbf{Z}$, con $0<k<n$. Definiamo

$$H=\{\sigma\in S_n : 1\leq\sigma(i)\leq k\quad\text{per ogni } i\in\{1,2,\ldots,k\}\}.$$

   (a) Dimostrare che H è un sottogruppo di S_n, isomorfo a $S_k\times S_{n-k}$.
   (b) Dedurre della parte (a) che $k!(n-k)!$ divide $n!$

14. Sia G il gruppo delle trasformazioni isometriche (cioè rotazioni e riflessioni in $\mathbf{R}^3$) che trasformano un tetraedo regolare $ABCD$ in se stesso.
    (a) Dimostrare che G ha 24 elementi.
    (b) Ogni $g\in G$ permuta i vertici A, B, C e D. Dimostrare che la mappa $G\longrightarrow S_4$ che manda $g\in G$ nella permutazione indotta, è un isomorfismo di gruppi.
    (c) Sia d_1, d_2 e d_3 i tre segmenti che uniscono i punti medi dei lati AB, BC e AC con quelli dei lati opposti CD, AD e BD rispettivamente. Ogni $g\in G$ permuta d_1, d_2 e d_3. Dimostrare che la mappa che manda $g\in G$ in questa permutazione è un omomorfismo suriettivo $G\longrightarrow S_3$. Determinarne il nucleo.