1. Per il gruppo $G = \mathbf{Z}_4$ e il gruppo diedrale $G = D_2$:
   (a) determinare i sottogruppi di G;
   (b) disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme dei sottogruppi di G (ordinato tramite l'inclusione).
2. Stessa domanda per $G = \mathbf{Z}_6$ e $G = D_3$. Nei diagrammi di Hasse indicare i sottogruppi normali.
3. Per definizione ogni $\sigma \in D_n$ preserva il poligono regolare Δ_n di n vertici di centro $(0,0) \in \mathbf{R}^2$. Sia d un divisore di n. Usare il fatto che gli elementi di D_n preservano anche Δ_d, per definire un omomorfismo naturale $D_n \longrightarrow D_d$. Dimostrare che questo omomorfismo è suriettivo. Calcolarne il nucleo nel caso $d = n/2$.
4. Sia $n \geq 2$. Determinare il centro e il sottogruppo dei commutatori del gruppo diedrale D_n.
5. Sia $f : G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Dimostrare che se H è abeliano, allora il sottogruppo $[G,G]$ dei commutatori è contenuto in $\ker(f)$.
6. Sia G un gruppo. Dimostrare che
$$\mathrm{Aut}(G) = \{f : G \longrightarrow G : f \text{ è un omomorfismo biietivo}\}$$
è un gruppo con composizione la composizione di omomorfismi.
7. Sia G un gruppo ciclico generato da g. Sia $n = \#G$.
   (a) Dimostrare che g^m genera G se e solo se $\mathrm{mcd}(m,n) = 1$;
   (b) dimostrare che ogni automorfismo di G manda g in un generatore di G;
   (c) dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_n)$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_n^*$.
8. Sia G un gruppo. Per ogni $g \in G$ sia $\varphi_g : G \longrightarrow G$ l'automorfismo dato da
$$\varphi_g(x) = gxg^{-1}, \qquad \text{per } x \in G.$$
   (a) Dimostrare che la mappa $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ data da $g \mapsto \varphi_g$ è un omomorfismo di gruppi;
   (b) dimostrare che il nucleo della applicazione della parte (a) è uguale al centro $Z(G)$.
   (c) Dimostrare che l'immagine della applicazione della parte (a) è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$.
9. Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice *caratteristico* se $\sigma(H) = H$ per ogni automorfismo $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. Dimostrare:
   (a) i sottogruppi $Z(G)$ e $[G,G]$ sono caratteristici;
   (b) un sottogruppo caratteristico di G è normale in G;
   (c) se $H \subset N \subset G$ sono sottogruppi tali che H è caratteristico in N e N è normale in G, allora H è normale in G.
10. Dimostrare che ogni sottogruppo di un gruppo ciclico G è caratteristico in G.
11. Sia G un gruppo con la proprietà che $G/Z(G)$ è ciclico. Dimostrare che G è abeliano.
12. Sia G un gruppo e sia $H \subset G$ un sottogruppo che contiene il sottogruppo $[G,G]$ dei commutatori. Dimostrare che H è un sottogruppo normale e che G/H è un gruppo abeliano.
13. Sia $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ l'insieme delle matrici
$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbf{R}^* \text{ e } b \in \mathbf{R}\right\}.$$
   (a) Dimostrare che G è un sottogruppo di $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.
   (b) Dimostrare che $H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G : a = d = 1\right\}$ è un sottogruppo normale di G.
   (c) Dimostrare che G/H è isomorfo a $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$.