1. Dimostrare per induzione che $n^3 - n$ è multiplo di 3, per ogni $n \in \mathbf{N}$.
2. (a) Dimostrare per induzione che $3^n < n!$ per ogni $n \geq 7$.
(b) Trovare $n_0 \in \mathbf{N}$ tale che $4^{n_0} < n_0!$. Dimostrare per induzione che $4^n < n!$ per ogni $n \geq n_0$.
3. Dimostrare per induzione che $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per ogni intero $n \geq 1$.
4. Dimostrare per induzione che la somma dei cubi dei primi n numeri pari è uguale a $2n^2(n+1)^2$.
5. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta $\sum_{i=0}^n (4i+1) = (2n+1)(n+1)$.
6. Siano $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, ed $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$, per $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, i numeri di Fibonacci.
(a) Dimostrare che $F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.
(b) Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, risulta che $\text{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$.
(c) Dimostrare che $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ per ogni $n \geq 1$.
7. Per $n \geq 0$ siano G_n i numeri definiti da $G_0 = 1$, $G_n = G_{n-1} + 2$, per $n \geq 1$. Calcolare G_1, G_2, G_3, G_4 . Chi sono i numeri G_n ?
8. Per $n \geq 1$ siano H_n i numeri definiti da $H_1 = 1$, $H_n = n + H_{n-1}$, per $n \geq 1$. Calcolare H_1, H_2, H_3, H_4 . Dimostrare per induzione che $H_n = n(n+1)/2$ per ogni $n \geq 1$.
9. Siano $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Determinare:
(a) $A \cap B \cap C$; (c) $A \cup (B \cap C)$; (e) $A - (B - C)$;
(b) $(A \cup B) \cap C$; (d) $(A - B) - C$; (f) $A \cap (B - C)$.
10. (a) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $A_n = \{m \in \mathbf{N} : m \leq n\}$. Determinare $A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7$ e determinare $A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$.
(b) Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $B_n = \{m \in \mathbf{Z} : \text{esiste un } k \in \mathbf{Z} \text{ tale che } m = kn\}$. Determinare $B_4 \cap B_5 \cap B_6$.
11. Costruire tre insiemi A, B, C per cui $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.
12. Siano A, B sottoinsiemi di un insieme X e siano A^c e B^c i complementari in X di A e B rispettivamente. È vero che $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$? Dimostrarlo, o determinare insiemi A, B, X per cui non vale.
13. Siano A, B e C tre sottoinsiemi di X . Dimostrare
(a) $A \cup B \subset A \cup B \cup C$; (c) $(A - C) \cap (C - B) = \emptyset$;
(b) $(A - B) - C \subset A - C$; (d) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.
14. Sia $P(A)$ l'insieme delle parti dell'insieme A .
(a) Determinare $P(\emptyset)$, $P(P(\emptyset))$. (b) Determinare $P(\{0\})$ e $P(P(\{0\}))$.
15. Determinare le seguenti intersezioni infinite $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (-\infty, n]$, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [n, \infty)$.
16. Determinare le seguenti unioni infinite $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (-\infty, n]$, $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [n, \infty)$.
17. Siano $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. e $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
(a) Determinare due funzioni iniettive distinte $f, g: A \rightarrow B$. Quante ce ne sono in tutto?
(b) Determinare due funzioni suriettive distinte $f, g: B \rightarrow A$. Ne esistono di iniettive?
(c) Determinare due funzioni biettive distinte $f, g: B \rightarrow C$. Quante ce ne sono in tutto?
18. Sia $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, definita da $f(n) = 3n^2$. Determinare se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
19. Sia $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$, definita da $f(n) = 3n^2 + 4$. Determinare se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.
20. Costruire una funzione $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ tale che
(a) f è una iniezione ma non una suriezione. (b) f è una suriezione ma non una iniezione.
21. Se esiste, costruire una biiezione fra i seguenti insiemi.
(a) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{7, 8, 10\}$; (c) $\mathbf{Z}$ e $\{x \in \mathbf{Z} : x \text{ è dispari}\}$;
(b) $A = \{0, 1\}$ e $B = \{1\}$; (d) $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \{0\}$;
22. Costruire due insiemi finiti $A, B \subset \mathbf{Z}$ per cui $\#(A \cup B) \neq \#A + \#B$ e due insiemi finiti $C, D \subset \mathbf{Z}$ per cui $\#(C \cup D) = \#C + \#D$.