COGNOME

NOME

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Definiamo la relazione $\sim$ su l'anello $\mathbf{Z}_8$ come segue. Dati $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{Z}_8$ si ha che $\bar{x} \sim \bar{y}$ se e solo se $\bar{x}^2 = \bar{y}^2$.
 - (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
 - (b) Quante classi di equivalenza ci sono?
2. Sia S_7 il gruppo simmetrico su sette simboli e sia $\sigma \in S_7$ la trasposizione che scambia 1 e 4. Sia $\tau = (1\ 3\ 2\ 4\ 6)$. Scrivere $\sigma\tau$ come prodotto di cicli disgiunti e calcolare l'ordine di $\sigma\tau$.
3. Sia R un anello commutativo e siano $I, J \subset R$ due ideali. Dimostrare che $(I + J)(I \cap J) \subset IJ$.
4. Sia S_3 il gruppo simmetrico su tre simboli. Quanti omomorfismi $S_3 \rightarrow \mathbf{Z}_6$ ci sono?
5. Sia R l'anello $\mathbf{Z}[X, Y]$ modulo l'ideale $(X^2 - Y, Y - 1, 2)$. Determinare la cardinalità del gruppo R^* degli elementi invertibili di R .

Soluzioni.

1. Le classi di equivalenza sono tre: $\{\bar{0}, \bar{4}\}$, $\{\bar{2}, \bar{6}\}$ e $\mathbf{Z}_8^*$.
2. Si ha che $\sigma\tau = (1\ 4)(1\ 3\ 2\ 4\ 6) = (1\ 3\ 2)(4\ 6)$. L'ordine di $\sigma\tau$ è 6.
3. Questo è l'esercizio 6 del foglio 9.
4. Poiché $\mathbf{Z}_6$ è abeliano e il sottogruppo dei commutatori di S_3 è A_3 , ogni omomorfismo $f : S_3 \rightarrow \mathbf{Z}_6$ ha la forma $S_3 \rightarrow S_3/A_3 \rightarrow \mathbf{Z}_6$. Il gruppo S_3/A_3 è isomorfo a $\mathbf{Z}_2$. Basta quindi contare gli omomorfismi $\mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_6$. Ce ne sono due: quello banale e l'omomorfismo che manda $\bar{1} \in \mathbf{Z}_2$ in $\bar{3} \in \mathbf{Z}_6$.
5. Si ha che $R = \mathbf{Z}[X, Y]/(X^2 - Y, Y - 1, 2) \cong \mathbf{Z}[X]/(X^2 - 1, 2) \cong \mathbf{Z}_2[X]/(X^2 - 1)$. L'anello R ha quattro elementi. Si ha che $R = \{0, 1, X, X + 1\}$. Il gruppo R^* consiste nei due elementi 1 e X .