Algebra 1 (Schoof) 3° appello 1 luglio 2011, ore 15:00–17:00.

COGNOME ..... *NOME* .....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Sia G un gruppo. Dimostrare che il centro $Z(G)$ e il sottogruppo dei commutatori $[G, G]$ sono sottogruppi caratteristici di G.

2. Sia $\Omega = \{(r, s) : r, s \in \mathbf{Z}_4\}$. Definiamo la relazione $\sim$ su Ω come segue. Dati $(r, s), (t, u) \in \Omega$ si ha che $(r, s) \sim (t, u)$ se e solo se $r^2 - s^2 = t^2 - u^2$.
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Quante classi di equivalenza ci sono?

3. Siano R e S due anelli commutativi. Dimostrare che ogni ideale di $R \times S$ ha la forma $I \times J$ dove I è un ideale di R e J è un ideale di S.

4. Sia I l'ideale dell'anello $\mathbf{Z}[X]$ generato dagli elementi 7 e X^2+3. Determinare $\#R^*$ per l'anello quoziente $R = \mathbf{Z}[X]/I$.

5. Sia G il gruppo additivo $\mathbf{Z}_{12}$ e sia H il gruppo moltiplicativo $\mathbf{Z}_{12}^*$. Quanti omomorfismi $G \longrightarrow H$ ci sono? Quanti omomorfismi $H \longrightarrow G$ ci sono?

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 9 del foglio 10 e anche l'esercizio 2 del secondo appello.

2. La classe di equivalenza di una coppia (r, s) è determinata dal valore di $r^2 - s^2 \in \mathbf{Z}_4$. Poiché $r^2 - s^2$ assume ogni valore in $\mathbf{Z}_4$ tranne $\overline{2}$, ci sono tre classi di equivalenza.

3. Questo è l'esercizio 2 (b) del foglio 9.

4. L'anello $R = \mathbf{Z}[X]/I$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_7[X]/(X^2+\overline{3})$. Poichè si ha che $X^2+\overline{3} = X^2-\overline{4} = (X-\overline{2})(X+\overline{2}) \in \mathbf{Z}_7[X]$, il Teorema cinese implica che $\mathbf{Z}_7[X]/(X^2+\overline{3})$ è isomorfo a $\mathbf{Z}_7[X]/(X-\overline{2}) \times \mathbf{Z}_7[X]/(X+\overline{2}) \cong \mathbf{Z}_7 \times \mathbf{Z}_7$. Il gruppo R^* è quindi isomorfo a $\mathbf{Z}_7^* \times \mathbf{Z}_7^*$ ed ha $6 \times 6 = 36$ elementi.

5. Il gruppo $G = \mathbf{Z}_{12}$ è ciclico di ordine 12 ed è generato da $\overline{1}$. Invece, il gruppo $H = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$ ha ordine 4 ed è isomorfo al gruppo di Klein: ogni $a \in \mathbf{Z}_{12}^*$ ha la proprietà che $a^2 = \overline{1}$.

   Ogni omomorfismo $f : G \longrightarrow H$ è determinato da $f(\overline{1})$. Infatti se $f(\overline{1}) = a$, allora $f(\overline{k}) = a^k$ per ogni $\overline{k} \in \mathbf{Z}_{12}$. Per vedere che per ogni scelta di $a \in \mathbf{Z}_{12}^*$ la mappa è ben definita, si osserva che se $k \equiv k' \pmod{12}$, allora per forza anche $a^k = a^{k'}$ in $\mathbf{Z}_{12}^*$. Ci sono quindi quattro omomorfismi: uno per ogni scelta di $a \in \mathbf{Z}_{12}^*$.

   L'unico elemento di ordine 2 di $\mathbf{Z}_{12}$ è $\overline{6}$. L'immagine di ogni omomorfismo $g : \mathbf{Z}_{12}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_{12}$ è quindi contenuta nel sottogruppo $\{\overline{0}, \overline{6}\}$. Se g non è zero, allora l'immagine di g è uguale a $\{\overline{0}, \overline{6}\}$ e quindi $\ker(g)$ ha ordine 2. Il gruppo $\mathbf{Z}_{12}^*$ ammette tre sottogruppi di ordine 2, vale a dire i gruppi generati da $\overline{5}$, $\overline{7}$ e da $\overline{11}$ rispettivamente. Ci sono quindi tre possibilità per $\ker(g)$. Tenendo conto dell'omomorfismo zero, ci sono quindi quattro omomorfismi $H \longrightarrow G$.