Algebra 1 (Schoof) | 2^o appello | 18 febbraio 2011, ore 15:00–17:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Scrivere 2011 in base 8.

2. Sia G un gruppo. Dimostrare che il centro $Z(G)$ e il sottogruppo dei commutatori $[G,G]$ sono sottogruppi caratteristici di G.

3. Stabilire se il gruppo alternante A_4 è isomorfo o meno al gruppo diedrale D_6. Spiegare la risposta.

4. Sia $f : \mathbf{Z}_{39}^* \longrightarrow \mathbf{Z}_{39}^*$ l'applicazione data da $f(x) = x^6$ per $x \in \mathbf{Z}_{39}^*$.
   (a) Dimostrare che f è un omomorfismo di gruppi e che $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$.
   (b) Quanti elementi ha il gruppo quoziente $\ker(f)/\mathrm{im}(f)$?

5. Sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali e sia A l'anello $\mathbf{R}[X]/(X^2)$. Sia $\phi : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R} \times A$ l'applicazione data da $\phi(g) = (g(1), \overline{g})$ dove $\overline{g} \in A$ indica la classe modulo X^2 di $g \in \mathbf{R}[X]$.
   (a) Dimostrare che ϕ è un omomorfismo suriettivo di anelli.
   (b) Esibire un generatore del nucleo di ϕ.

Soluzioni.

1. La risposta è 3733. Infatti, si ha che $3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 3 = 2011$.

2. Questo è l'esercizio 9 del foglio 10.

3. Anche se hanno la stessa cardinalità, i gruppi A_4 e D_6 non sono isomorfi. Per esempio, perché D_6 contiene esattamente due elementi di ordine 3 (le rotazioni di ± 120 gradi), mentre A_4 ne contiene otto (i 3-cicli). Oppure perché $Z(A_4)$ è banale, mentre $Z(D_6)$ ha ordine 2. Oppure perché $\#[A_4, A_4] = 4$, mentre $\#[D_6, D_6] = 3 \ldots$

4. La parte (a) segue dal fatto che f è un omomorfismo che ha la proprietà che $f(f(y)) = 1$ per ogni $y \in \mathbf{Z}_{39}^*$. Infatti, si ha che $f(f(y)) = y^{36}$ per ogni $y \in \mathbf{Z}_{39}^*$. Il Teorema di Lagrange implica che per ogni $x \in \mathbf{Z}$ con $\mathrm{mcd}(x, 39) = 1$, si ha che $x^{36} \equiv 1 \pmod{13}$ e $x^{36} \equiv 1 \pmod 3$ e quindi $x^{36} \equiv 1 \pmod{39}$.
   Per la parte (b) si osserva che per ogni $x \in \mathbf{Z}$ con $\mathrm{mcd}(x, 39) = 1$, si ha che $x^6 \equiv 1 \pmod 3$ mentre $x^6 \equiv \pm 1 \pmod{13}$. Per il Teorema Cinese del resto abbiamo quindi che $\mathrm{im}(f)$ è contenuta nel sottogruppo $\{\overline{1}, \overline{25}\}$ di $\mathbf{Z}_{39}^*$. Visto che $2^6 \equiv 25 \pmod{39}$, abbiamo persino uguaglianza. Per il teorema di isomorfismo, il nucleo di f ha $\#\mathbf{Z}_{39}^*/\#\mathrm{im}(f) = \varphi(39)/2 = 12$ elementi. Il quoziente $\ker(f)/\mathrm{im}(f)$ ha quindi sei elementi.

5. La mappa ϕ è un omomorfismo di anelli. Per vedere che è suriettivo, sia $\xi = (a\overline{X} + b, \lambda)$ un elemento arbitrario di $A \times \mathbf{R}$. Il polinomio $g = (\lambda - a - b)X^2 + aX + b$ ha la proprietà che $\phi(g) = \xi$.
   (b) Il polinomio $X^2(X-1)$ è un generatore del nucleo di ϕ. Infatti, si ha che $X^2(X-1) \in \ker(f)$. Viceversa, se $g \in \ker(f)$, allora g è divisibile per X^2 e $g(1) = 0$. Abbiamo quindi che $g = X^2 \cdot h$ per un polinomio $h \in \mathbf{R}[X]$. Il fatto che $g(1) = 0$ implica che $h(1) = 0$ e quindi h è divisibile per $X - 1$. Questo implica che g è divisibile per $X^2(X-1)$ e quindi g appartiene all'ideale generato da $X^2(X-1)$.