COGNOME .... *NOME* ....

Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Sia $\sigma \in S_7$ la trasposizione che scambia 1 e 2. Sia $\tau = (1\,4\,6\,2\,5\,7\,3)$. Scrivere $\sigma\tau$ come prodotto di cicli disgiunti e calcolare l'ordine di $\sigma\tau$.

2. Quante relazioni di equivalenza distinte si possono definire su un insieme di quattro elementi $\{a, b, c, d\}$?

3. Siano $x = 3 + 5i$ e $y = 2 + i$. Determinare due interi di Gauss q, r per cui valgano le relazioni

$$\begin{cases} x = qy + r, \\ N(r) < N(y). \end{cases}$$

(La norma $N(z)$ di un intero di Gauss $z \in \mathbf{Z}[i]$ è definita da $N(z) = z\bar{z}$.)

4. Quanti omomorfismi $S_3 \longrightarrow \mathbf{Z}_3$ ci sono? Spiegare la risposta.

5. Sia $I \subset \mathbf{Z}[X]$ l'ideale generato dai polinomi X^2-1 e X^2+1. Quanti sono gli elementi invertibili dell'anello quoziente $\mathbf{Z}[X]/I$?

Soluzioni.

1. Abbiamo che $\sigma\tau = (1\,2)(1\,4\,6\,2\,5\,7\,3) = (1\,4\,6)(2\,5\,7\,3)$. L'ordine del 3-ciclo è 3, e l'ordine del 4-ciclo è 4. L'ordine di $\sigma\tau$ è quindi uguale a $\mathrm{mcm}(3, 4) = 12$.

2. Questo è l'esercizio 6 del foglio 2. Il numero delle relazioni di equaivalenza è uguale al numero di partizioni di $\{a, b, c, d\}$, il quale è uguale a 15.

3. Prendiamo per q l'intero di Gauss più vicino al quoziente $x/y = (3 + 5i)/(2 + i) = \frac{11}{5} + \frac{7}{5}i$. Abbiamo quindi che $q = 2 + i$. Questo implica che $r = x - qy = (3 + 5i) - (2 + i)(2 + i) = i$. Infatti, si ha che $N(r) = 1$ è minore di $N(y) = 5$, come richiesto.

4. Poiché $\mathbf{Z}_3$ è abeliano, ogni omomorfismo $S_3 \longrightarrow \mathbf{Z}_3$ si fattorizza via il quoziente $S_3/[S_3, S_3]$. Si sa che $[S_3, S_3] = A_3$ e che $S_3/A_3 \cong \mathbf{Z}_2$. Basta quindi contare gli omomorfismi $\phi : \mathbf{Z}_2 \longrightarrow \mathbf{Z}_3$. La cardinalità dell'immagine di ϕ divide 3 perché si tratta di un sottogruppo di $\mathbf{Z}_3$, ma divide anche 2 per il Teorema dell'isomorfismo. Concludiamo che l'immagine di ϕ è banale e che l'unico omomorfsimo $S_3 \longrightarrow \mathbf{Z}_3$ è quello banale.

5. Poiché si ha che $X^2 + 1 - (X^2 - 1) = 2$, l'ideale $I = (X^2 + 1, X^2 - 1)$ è uguale all'ideale $(X^2 - 1, 2)$. L'anello quoziente $R = \mathbf{Z}[X]/I$ è quindi isomorfo a $\mathbf{Z}_2[X]/(X^2 - 1)$. I quattro elementi di quest'anello sono rappresentati da 0, 1, X e $X + 1$. Poiché $X^2 \equiv 1$ in R, gli elementi 1 e X sono invertibili. Invece $(X + 1)^2 \equiv 0$ in R e quindi 0 e $X + 1$ non sono invertibili. Il gruppo degli elementi invertibili ha quindi 2 elementi.