1. Sia A un insieme dotato da un ordinamento parziale R. Se $a, b \in A$ soddisfano $(a, b) \in R$, scriviamo anche aRb oppure $a \leq b$. Sia R' la relazione su A data da "$aR'b$ se e solo se $b \leq a$". Dimostrare che R' è un ordinamento parziale su A.

2. L'insieme $\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$ è ordinato mediante $d \leq d'$ quando d divide d'.
   (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
   (b) Esibire, se esistono, i massimi e minimi assoluti.
   (c) Trovare i maggioranti di $\{2, 9\}$ e, se esiste, $\sup(2, 9)$.
   (d) Trovare i minoranti di $\{60, 72\}$ e, se esiste, $\inf(60, 72)$.

3. Sia $X \subset P(\{1, 2, 3, 4\})$ dato da
$$X = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$
   Definiamo un ordinamento parziale su X ponendo $A \leq B$ quando $A \subset B$ per $A, B \in X$.
   (a) Determinare gli elementi massimali e minimali.
   (b) Esibire, se esistono, i massimi e minimi assoluti.
   (c) Trovare i maggioranti di $\{\{2\}, \{4\}\}$ e, se esiste, $\sup(\{2\}, \{4\})$.
   (d) Trovare i minoranti di $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ e, se esiste, $\inf(\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\})$.

4. Stabilire quali dei seguenti insiemi parzialmente ordinati ($A \leq B$ se e solo se $A \subseteq B$) sono reticoli:
   (a) $\{A \in P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) : \#A \text{ dispari}\}$; (c) $\{A \in P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) : A \supset \{1, 3\}\}$;
   (b) $\{A \in P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) : \#A \geq 2\}$; (d) $\{A \in P(\{1, 2, 3\}) : \#A \leq 1 \text{ o } |A| = 3\}$.

5. Si consideri il reticolo $L = \{A \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) : |A| \leq 1 \text{ oppure } |A| = 4\}$ (con $A \wedge B = A \cap B$ e $A \vee B = A \cup B$).
   (a) Dimostrare che L è limitato.
   (b) Stabilire se ci sono elementi il cui complemento non è unico.
   (c) Stabilire se L è un reticolo distributivo.

6. Siano $(L, \vee, \wedge)$ e $(L', \vee', \wedge')$ due reticoli e siano $(L, \leq)$ e $(L', \leq')$ le corrispondenti relazioni di ordine parziale. Una funzione biettiva $f : L \to L'$ si dice un *isomorfismo di reticoli* se: $f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y)$ per ogni $x, y \in L$. In tal caso i due reticoli sono detti *isomorfi*.
   (a) Dimostrare che se $f : L \to L'$ è un isomorfismo di reticoli allora anche $f^{-1} : L' \to L$ lo è;
   (b) Dimostrare che una funzione biettiva $f : L \to L'$ è un isomorfismo di reticoli se vale la seguente condizione: dati $x, y \in L$, si ha che $x \leq y$ se e solo se $f(x) \leq' f(y)$.
   (c) Sia $X = \{1, 2\}$ e si consideri il reticolo $(P(X), \cap, \cup)$. Determinare quanti sono gli isomorfismi di reticolo $f : P(X) \to P(X)$.