1. (a) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 20$;
   (b) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = -12$;
   (c) Stabilire se esistono $s, t \in \mathbf{Z}$ tali che $24s + 18t = 3$.

2. Determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ delle seguenti congruenze
   (a) $x \equiv 3 \pmod{11}$;   (b) $3x \equiv 1 \pmod{5}$;   (c) $9x \equiv 0 \pmod{30}$.

3. Stabilire se per le seguenti congruenze esistono soluzioni $x \in \mathbf{Z}$. In caso affermativo, determinarle tutte. (a) $5x \equiv 8 \pmod{17}$ (b) $9x \equiv 26 \pmod{30}$.

4. Per i seguenti numeri n e m, determinare $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $an + bm = \mathrm{mcd}(n, m)$.
   (a) $n = 4$ e $m = 30$;   (c) $n = 103$ e $m = 101$;   (e) $n = 221$ e $m = 169$;
   (b) $n = 14$ e $m = 40$;   (d) $n = 91$ e $m = 0$;   (f) $n = 10001$ e $m = 9999$.

5. Determinare tutte le soluzioni $x \in \mathbf{Z}$ dei seguenti sistemi di congruenze
   (a) $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{8}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{8}, \\ 3x \equiv 3 \pmod{5}, \\ 2x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 9x \equiv 20 \pmod{8}, \\ x \equiv -2 \pmod{5}, \\ -8x \equiv 4 \pmod{9}; \end{cases}$

6. (a) Per $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ determinare il resto della divisione per $p = 7$ di 5^k.
   (b) Stessa domanda, ma per per $p = 11$ e per $p = 13$.

7. Per $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, sia $\mathbf{Z}_n^*$ il sottoinsieme degli elementi invertibili di $\mathbf{Z}_n$. La funzione φ di Euler è definita da $\varphi(n) = \#\mathbf{Z}_n^*$.
   (a) Determinare $\varphi(4)$, $\varphi(20)$ e $\varphi(30)$.
   (b) Sia p un primo. Dimostrare che $\varphi(p) = p - 1$ e che $\varphi(p^2) = p^2 - p$.

8. Siano $x_0, x_1, \ldots, x_n$ le cifre dell'intero positivo x rappresentato in base 10. Si ha quindi che $x = x_0 + x_1 10 + \ldots + x_n 10^n$.
   (a) Dimostrare che $x \equiv x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \pmod{9}$. Spiegare come funziona la famosa "prova del 9".
   (b) Far vedere che $x \equiv x_0 - x_1 + x_2 - \ldots + (-1)^n x_n \pmod{11}$.
   Dire se 12191318141771516 è divisibile per 11 o meno.

9. Andare al sito `http://www.flashlightcreative.net/swf/mindreader` (anche raggiungibile dalla pagina web del corso). Spiegare come mai la sfera magica riesce a sempre indovinare il simbolo giusto.