1. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ e sia data la relazione

$$R = \{(1, 11), (1, 13), (1, 15), (2, 12), (2, 13), (3, 11), (3, 15), (4, 12), (4, 13)\}.$$

   (a) Esiste un elemento di A che non è in relazione con alcun elemento di B?
   (b) Quanti elementi di A sono in relazione con $2 \in B$? Quanti elementi di A sono in relazione con $6 \in B$?
   (c) Determinare se R è la relazione individuata da una funzione $f : A \to B$.

2. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ e sia data la relazione

$$R = \{(1, 11), (2, 13), (3, 15), (4, 14), (5, 15)\}.$$

   (a) Verificare che R è la relazione individuata da una funzione $f : A \to B$. Spiegare bene la risposta e determinare esplicitamente f.
   (b) Determinare se f è iniettiva.
   (c) Determinare se f è suriettiva.

3. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ e sia $f : A \to B$ la funzione data da

$$f(1) = 12,\ f(2) = 12,\ f(3) = 14,\ f(4) = 13,\ f(5) = 11.$$

   (a) Qual è la relazione determinata da f?
   (b) Quante sono le relazioni fra A e B che si ottengono da funzioni $f : A \to B$?

4. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia R la relazione su A data da

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 1), (2, 5), (5, 2)(1, 4), (4, 1)\}.$$

   (a) Determinare se R è riflessiva.
   (b) Determinare se R è simmetrica.
   (c) Determinare se R è transitiva.

5. Sia X un insieme e sia $P(X)$ l'insieme delle parti di X. Consideriamo su $P(X)$ la seguente relazione. Dati $A, B \in P(X)$, definiamo $(A, B) \in R$ se e soltanto se $A \cup B \neq \emptyset$.
   (a) Determinare se R è riflessiva.
   (b) Determinare se R è simmetrica.
   (c) Determinare se R è transitiva.

6. Sia R la relazione su $\mathbf{Z}_7$ determinata da: "$(x, y) \in R$ se e soltanto se $x^2 \equiv y^2 \pmod 7$".
   (a) Dimostrare che R è una relazione di equivalenza.
   (b) Quante classi di equivalenza ci sono?

7. Sia A un insieme di n elementi. Per $i = 0, 1, \ldots, n$, sia $P_i \subset P(A)$ la collezione dei sottoinsiemi di A che possiedono esattamente i elementi.
   (a) Dimostrare che gli insiemi P_i formano una partizione di $P(A)$.
   (b) Esibire una relazione di equivalenza su $P(A)$ che induce la partizione $\{P_i\}$ di $P(A)$.