Algebra e Logica Esercizi 2. Induzione, divisone con resto, mcd. Roma, 3 ottobre 2017.

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, il numero $n^2 + n$ è pari,

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 7$, si ha che $3^n < n!$.

3. Sia $n \geq 1$ un numero intero.
   (a) Dimostrare per induzione che per ogni intero $n \geq 1$, si ha che
   $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   (b) Dimostrare che la somma dei primi n numeri naturali dispari è uguale a n^2.
   (c) Dimostrare che la somma dei cubi dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. Siano F_k (per $k \geq 1$) i numeri di Fibonacci. Abbiamo quindi che $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ed $F_{k+1} = F_{k-1} + F_k$, per $k \in \mathbf{N},\ k \geq 2$,
   (a) Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha che $F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
   (b) Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, risulta che $\mathrm{mcd}(F_n, F_{n+1}) = 1$.
   (c) Dimostrare che che per ogni $n \geq 1$ si ha che $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

5. Per $n \geq 1$ siano H_n i numeri definiti da da $H_1 = 1$, $H_n = n + H_{n-1}$, per $n \geq 2$. Calcolare H_2, H_3, H_4. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, si ha che $H_n = n(n+1)/2$.

6. Determinare il resto delle divisioni per 3, 4, 9 e 11 del numero 1001.

7. (a) Scrivere il numero 123 in base 2 e in base 7;
   (b) Scritto in base 2 sia $n = 10010001001$. Esprimere n in base 3;
   (c) Scritto in base 16, siano $n = AB$ e $m = 9C$. Calcolare nm e scrivere il risultato in base 16.

8. Calcolare $\mathrm{mcd}(623, 413)$, $\mathrm{mcd}(1014, 273)$ e $\mathrm{mcd}(1122, 105)$.

9. Siano $n, m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ e siano $d = \mathrm{mcd}(n, m)$ e $D = \mathrm{mcm}(n, m)$ il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra n ed m.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{mcd}(m/d, n/d) = 1$.
   (b) Dimostrare che $nm = dD$.

10. Per i seguenti numeri n e m, determinare $a, b \in \mathbf{Z}$ tali che $an + bm = \mathrm{mcd}(n, m)$.
   (a) $n = 4$ e $m = 30$; (c) $n = 103$ e $m = 101$; (e) $n = 221$ e $m = 169$;
   (b) $n = 14$ e $m = 40$; (d) $n = 91$ e $m = 0$; (f) $n = 10001$ e $m = 9999$.