

1. Sia $(\mathcal{P}, \wedge, \vee, \neg)$ l'algebra di Boole del calcolo proposizionale. Qua scriviamo $\neg A$ per la negazione dell'affermazione A . Se l'affermazione A implica l'affermazione B , scriviamo $A \Rightarrow B$. Considerare la seguente relazione:

$$A \text{ "}\leq\text{" } B \text{ se } A \Rightarrow B.$$

- (a) Verificare che $A \text{ "}\leq\text{" } B$ è logicamente equivalente alla relazione $A \wedge B \Leftrightarrow A$ ed alla relazione $A \vee B \Leftrightarrow B$.
 (b) Dati $A, B \in \mathcal{P}$, chi sono $\sup\{A, B\}$ ed $\inf\{A, B\}$?
2. Siano x un elemento e siano X, Y e Z insiemi. Siano dati gli enunciati

$$A: \text{ "}\{x \in X\text{"}, \quad B: \text{ "}\{x \in Y\text{"}, \quad C: \text{ "}\{x \in Z\text{"}.$$

- (a) Combinando A, B, C mediante gli operatori logici \wedge, \vee, \neg esprimere i seguenti fatti:
 $x \notin X$; $x \in Y \cup Z$; $x \notin Y \cup Z$; $x \in X \cap Y \cap Z$; $x \in X \setminus Y \cap Z$;
 $x \in X \cap (Y \cup Z)$; $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; $x \in (X \setminus Y) \cap (X \cap Z)$.
- (b) Cosa dicono su x gli enunciati
 $\neg A \wedge B$; $A \wedge (B \vee \neg C)$; $\neg(A \vee (B \wedge C))$; $A \vee \neg(B \wedge C)$);?
 Illustrare i vari casi con dei disegni.
3. Per ognuno dei seguenti enunciati: scrivere cosa vuol dire "a parole", determinare se è vero o falso e scriverne la negazione (non ci devono essere negazioni davanti ai quantificatori).
- (a) $\exists x \in \mathbf{R} : ((x^2 < 10) \wedge (|3 - x| > 2))$;
 (b) $\forall x \in \mathbf{R} : ((x \neq 4) \Rightarrow (x - 5 > 1))$;
 (c) $\forall x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R} : (x + y = 0)$;
 (d) $\exists x \in \mathbf{R} \forall y \in \mathbf{R} : (xy = 0)$;

4. Sia dato l'enunciato

$$\text{Siano } A, B, C \text{ insiemi. } \forall A, B, C : (A \cap B \neq \emptyset) \wedge (B \cap C \neq \emptyset) \Rightarrow (A \cap C \neq \emptyset).$$

- (a) Determinare se è vero o falso.
 (b) Scrivere la sua negazione.
 (c) Se è vero dimostrarlo; se è falso dimostrare che è vera la sua negazione, ed esibire un controesempio esplicito.
5. È vero che dati tre insiemi A, B, C vale l'implicazione
 $(A \cup C = B \cup C) \wedge (A \cap C = B \cap C) \Rightarrow A = B$?
 Dimostrarlo o esibire un controesempio.