1. Sia $X = \{a, b, c, d\}$. Sia $S = \{\{a, b\}, \{b\}, \emptyset, \{c, d\}, X\}$ l'insieme ordinato mediante la relazione di contenenza $\subset$. Disegnare il diagramma di Hasse corrispondente. Determinare se S è un reticolo.

2. Sia $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 63\}$ l'insieme ordinato mediante la relazione di divisibilità. Disegnare il diagramma di Hasse corrispondente. Richiamare la definizione di reticolo. Determinare se A è un reticolo.

3. Un *algebra di Boole* è un reticolo limitato, complementato e distributivo. Sia X un insieme e sia $P(X)$ l'insieme delle parti di X. Il complemento di $B \in P(X)$ indichiamo con B^c. Verificare che $P(X)$ con le operazioni $\cap$ e $\cup$ è un'algebra di Boole.

4. Sia A un algebra di Boole. Dimostrare le "leggi di De Morgan": $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ e $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ per ogni $x, y \in A$.

5. Dato un intero $n \geq 1$, si denoti $\mathbf{D}_n = \{m \in \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$. Supponiamo che $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ dove i numeri p_i sono primi *distinti*. Dato $a \in \mathbf{D}_n$, si definisca $\bar{a} = \frac{n}{a}$.
   (a) Verificare che $(\mathbf{D}_n, \mathrm{mcd}, \mathrm{mcm}, ^-)$ è un'algebra di Boole con 2^k elementi.
   (b) Sia $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Verificare che l'applicazione $\mathbf{D}_n \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ che manda un divisore d di n nell'insieme dei suoi divisori primi, è un isomorfismo di algebre di Boole (ossia un'applicazione biiettiva che rispetta le operazioni delle due algebre).

6. Sia B un'algebra di Boole. Per $x, y \in B$ definiamo $x \oplus y = x\overline{y} + \overline{x}y$. Siano $x, y, z \in B$. Dimostrare le seguenti uguaglianze o darne un controesempio. (Sugg: interpretare le formule nell'algebra di Boole $P(X)$).
   (a) $x \oplus y = y \oplus x$;
   (b) $x \oplus x = 0$;
   (c) $x \oplus y = (x + y)\overline{xy}$;
   (d) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

7. Sia A l'insieme dei sottoinsiemi $B \subset \mathbf{N}$ che soddisfano una delle seguenti condizioni: la cardinalità di B è finita oppure la cardinalità del complementare di B è finita.
   (a) Dimostrare che $(A, \cap, \cup, ^c)$ è un'algebra di Boole numerabile.
   (b) Dedurre che A non è isomorfo a $P(X)$ per nessun insieme X.

8. Un *anello Booleano* e un anello A con la proprietà che $x^2 = x$ per ogni $x \in A$.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{Z}_2$ è un anello Booleano.
   (b) Dimostrare che il prodotto di due anelli Booleani è un anello Booleano.
   (c) Sia X un insieme e sia $A = P(X)$. Per $B, C \in P(X)$ definiamo $B \cdot C = B \cap C$ e $B \oplus C = (B \cup C) - (B \cap C)$. Dimostrare che con queste operazioni, $P(X)$ è un anello Booleano con gli elementi neutri 0 e 1 rispettivamente uguali a $\emptyset$ e X.