COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali. Sia A l'insieme delle funzioni $\mathbf{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ e sia B l'insieme delle funzioni $\{0, 1\} \longrightarrow \mathbf{N}$.
   (a) Dire se A è numerabile o meno e spiegare perché.
   (b) Stessa domanda per B.
2. Sia $X = \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$ e sia $R = \{(x, y) \in X \times X : \forall\, a \in X\ \exists\, b \in X \text{ con } x+a = yb\}$. Determinare la cardinalità di R.
3. Scritti in base 9, siano dati $x = 23$ e $y = 47$. Scrivere il prodotto xy in base 9.
4. Determinare i numeri naturali n per cui $\overline{x}^2 = \overline{1}$ per ogni $\overline{x} \in \mathbf{Z}_n^*$.
5. Sia $(xy')'(z \vee x' \vee yy')' \vee xyz'$ un polinomio Booleano in quattro variabili x, y, z e w.
   (a) Portarlo in *forma disgiuntiva* (cioè in *somma di prodotti*).
   (b) Portarlo in *forma normale disgiuntiva* (cioè in *somma di prodotti completa*).
6. Determinare tutti gli interi $x \in \mathbf{Z}$, con $|x| < 100$, che sono soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 18 \pmod{24}, \\ 4x \equiv 2 \pmod{18}. \end{cases}$$

Soluzioni.

1. L'applicazione $F : A \longrightarrow P(\mathbf{N})$ data da $F(\phi) = \{m \in \mathbf{N} : \phi(m) = 0\}$ è una biezione da A a $P(\mathbf{N})$. Poiché l'insieme delle parti $P(\mathbf{N})$ di $\mathbf{N}$ non è numerabile, neanche A è numerabile. Invece, B è unione della collezione numerabile degli insiemi finiti delle funzioni $\{0, 1\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, m\}$ (con $m \in \mathbf{N}$). Ne segue che B è numerabile.
2. Sia $(x, y) \in R$. Se $y = 0$, allora $x + a = 0$ per ogni $a \in X$. Questo è assurdo. Se $y > 1$, osserviamo che $x + a$ è divisibile per y per ogni $a \in X$. Anche questo è assurdo. Abbiamo quindi che $y = 1$ e che $x + a \in X$ per ogni $a \in X$. Questo è soltanto possibile se $x = 0$. Concludiamo che $R = \{(0, 1)\}$ e quindi $\#R = 1$.
3. $xy = 1213$.
4. Questo è l'esercizio 8 del foglio 6.
5. Questo è l'esercizio 5 del foglio 11.
6. $x = -58$, 14 oppure 86.