Algebra e Logica (Schoof) | 3^o appello | 18 giugno 2018, ore 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia n un intero che, scritto in base 2, è dato da $n = 10101001$. Scrivere n in base 3.
2. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Sia $S = \{\{1, 2\}, \{2\}, \emptyset, \{3, 4\}, X\}$ l'insieme ordinato mediante la relazione di inclusione $\subset$. Disegnare il diagramma di Hasse corrispondente. Determinare se S è un reticolo.
3. Sia $n = 47$. Per $x \in \mathbf{Z}$ indichiamo con $\overline{x}$ la classe di resto di x in $\mathbf{Z}_n$. Determinare $m \in \mathbf{Z}$, tale che il quoziente $\overline{7}/\overline{11}$ sia uguale a $\overline{m}$ in $\mathbf{Z}_n$.
4. Se esiste, costruire una biezione fra gli insiemi $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \{0\}$.
5. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Definiamo una relazione R su $P(X)$ come segue: per due elementi $A, B \in P(X)$ si ha che $A\,R\,B$ quando $\#A \equiv \#B \pmod 3$
   (a) Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
   (b) Per ogni classe di equivalenza determinarne la cardinalità.
6. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Spiegare perché.
   (a) $\exists x \in \mathbf{R}\, \forall y \in \mathbf{R}\, \exists z \in \mathbf{R} : x + y + z = 0$;
   (b) $\forall x \in \mathbf{R}\, \exists y \in \mathbf{R}\, \forall z \in \mathbf{R} : x + y + z = 0$;
   (c) $\exists x \in \mathbf{R}\, \exists y \in \mathbf{R}\, \forall z \in \mathbf{R} : x + y + z \neq 0$.

Soluzioni.

1. In base 10 abbiamo che $n = 1 + 8 + 32 + 128 = 169$. Si ha che $169 = 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 81$. In base 3 abbiamo quindi che $n = 20021$.
2. Questo è l'esercizio 1 del foglio 10.
3. Con l'algoritmo euclideo si calcola che $4 \cdot 47 - 17 \cdot 11 = 1$. Si ha quindi che $\overline{11}^{-1} = -\overline{17}$. Ne segue che $\overline{7}/\overline{11} = -\overline{7} \cdot \overline{17} = -\overline{119} = \overline{22}$.
4. Questo è l'esercizio 9 del foglio 1.
5. Ci sono tre classi di equivalenza C_0, C_1 e C_2, dove C_i consiste nei sottoinsiemi $A \subset X$ con $\#A \equiv i \pmod 3$. Si ha che $\#C_0 = \#C_1 = 5$ mentre $\#C_2 = 6$.
6. L'affermazione (a) è vera. Prendo $x = 0$. Allora per ogni y esiste z, vale a dire $z = -y$. L'affermazione (b) è falsa. Infatti, la sua negazione $\exists x \in \mathbf{R} \forall y \in \mathbf{R} \exists z \in \mathbf{R} : x + y + z \neq 0$ è vera. Prendo $x = 0$ e per ogni y esiste z, per esempio $z = 1 - y$. l'affermazione (c) è falsa, perché la sua negazione $\forall x \in \mathbf{R} \forall y \in \mathbf{R} \exists z \in \mathbf{R} : x + y + z = 0$ è vera. Infatti, per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ posso prendere $z = -x - y$.