

1. Sia A un sottoanello di un anello B con la proprietà che B è intero su A . Sia F un campo algebricamente chiuso. Dimostrare che ogni omomorfismo $f : A \rightarrow F$ si estende ad un omomorfismo $B \rightarrow F$.
2. Sia A un sottoanello di un anello B con la proprietà che B è intero su A .
 - (a) Dimostrare che se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A , allora $B_{\mathfrak{m}}$ è una $A_{\mathfrak{m}}$ -algebra intera.
 - (b) Sia $\mathfrak{n}$ un ideale massimale di B e sia $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$. Dimostrare che, in generale, $B_{\mathfrak{n}}$ non è intero su $A_{\mathfrak{m}}$.
(Sugg: siano $A = k[X]$, $B = K[X, Y]/(Y^2 - X - 1)$ e $\mathfrak{n} = (Y - 1)$. L'elemento $1/(X + 1)$ di $B_{\mathfrak{n}}$ non è intero su $A_{\mathfrak{m}}$.)
3. Sia A una $\mathbf{Z}$ -algebra finitamente generata: si ha che $A = \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]/I$ per qualche ideale $I \subset \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$.
 - (a) Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A . Dimostrare che $A/\mathfrak{m}$ è un campo finito.
 - (b) Dimostrare che per ogni q il numero di ideali massimali $\mathfrak{m}$ di A per cui $A/\mathfrak{m}$ è un campo finito di q elementi, è $\leq q^n$.
 - (c) Dimostrare che la funzione zeta di A data da

$$\zeta_A(s) = \prod_{\mathfrak{m}} \frac{1}{1 - \#(A/\mathfrak{m})^{-s}}$$

converge per $s \in \mathbf{C}$ di parte reale $> n + 1$.

4. Sia A un anello e sia B una A -algebra fedelmente piatta. Dimostrare che se B è Noetheriana, anche A è Noetheriano.
5. Sia R un anello Noetheriano. Dimostrare che anche l'anello $R[[X]]$ delle serie di potenza con coefficienti in R è Noetheriano.
6. Sia A un anello Noetheriano.
 - (a) Dimostrare che il suo nilradicale N è nilpotente, cioè $N^t = (0)$ per qualche esponente $t \geq 1$.
 - (b) Dimostrare che $f = \sum_n a_n X^n \in A[[X]]$ è nilpotente se e solo se a_n è nilpotente per ogni $n \geq 1$.
7. Sia A un anello.
 - (a) Dimostrare che A è Noetheriano se e solo se ogni ideale primo di A è finitamente generato.
 - (b) Dimostrare che ogni ideale massimale dell'anello $C^\infty[0, 1]$ delle funzioni infinitamente differenziabili dall'intervallo chiuso $[0, 1]$ ad $\mathbf{R}$, ha la forma

$$\mathfrak{m}_a = \{f \in C^\infty[0, 1] : f(a) = 0\}, \quad \text{per qualche } a \in [0, 1].$$

- (c) Dimostrare che $C^\infty[0, 1]$ non è Noetheriano, ma ha la proprietà che ogni suo ideale massimale è generato dalla funzione $x - a$ ed è quindi finitamente generato.