1. Sia R un anello e sia $0 \to A \to B \to C \to 0$ una successione esatta di R-moduli. Dimostrare che se C è piatto, allora per ogni R-modulo M la successione indotta

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M \longrightarrow C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

è esatta (Suggerimento: considerare un R-modulo libero F che ammette un epimorfismo $F \longrightarrow C$)

2. Sia R l'anello $k[X, Y]$ in due variabili su un campo k. Siano I l'ideale (X) e J l'ideale (Y).
   (a) Far vedere che I, J e $I \cap J$ sono R-moduli liberi.
   (b) Dimostrare che $I + J$ è senza R-torsione, ma *non* è piatto.

3. Sia A un anello. Un A-modulo P si dice *fedelmente piatto* se è piatto e se per ogni A-modulo M si ha che $P \otimes_A M = 0$ se e solo se M è zero.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{Q}$ è un $\mathbf{Z}$-modulo piatto, ma non fedelmente piatto.
   (b) Sia $A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli e sia M un R-modulo. Dimostrare che M è un A-modulo fedelmente piatto se e solo se $M \otimes_A B$ è un B-modulo fedelmente piatto.

4. Sia R un anello. Un R-modulo M si dice *fedele* quando la mappa $R \longrightarrow \mathrm{End}_R(M)$ data da $\lambda \mapsto \lambda_M$ è iniettiva. Qua abbiamo che $\lambda_M(m) = \lambda m$ per ogni $m \in M$.
   (a) Far vedere che moduli fedelmente piatti sono fedeli.
   (b) Dimostrare che $\mathbf{Q}$ è uno $\mathbf{Z}$-modulo *fedele* e *piatto* ma non *fedelmente piatto.*

5. Sia R un anello e sia

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

una successione esatta di R-moduli. Suppiamo che A e C siano piatti e che *uno* fra A e C sia fedelmente piatto. Dimostrare che B è fedelmente piatto.

6. Sia A un anello.
   (a) Dimostrare che se $\mathrm{Spec}(A)$ consiste in un unico punto, allora A possiede un unico ideale massimale $\mathfrak{m}$. Inoltre, ogni elemento di $\mathfrak{m}$ è nilpotente.
   (b) Dimostrare che se $\mathrm{Spec}(A)$ è discreto e finito, allora A, modulo il suo nilradicale, è un prodotto finito di campi.

7. Sia p un numero primo e sia

$$R = \{x \in \mathbf{Q} : mx \in \mathbf{Z}, \text{ per qualche } m \in \mathbf{Z} \text{ che non è divisibile per } p\}.$$

   (a) Dimostrare che R è un sottoanello di $\mathbf{Q}$.
   (b) Dimostrare che R ha un unico ideale massimale $\mathfrak{m}$ e che $R - \mathfrak{m} = R^*$.
   (c) Dimostrare che $X = \mathrm{Spec}(R)$ ha cardinalità 2 e determinare gli aperti di X.

8. Sia R un dominio.
   (a) Dimostrare che (0) è un punto denso di $\mathrm{Spec}(R)$.
   (b) Dimostare che ogni aperto non vuoto $U \subset \mathrm{Spec}(R)$ è denso.
   (c) Esibire un anello A che ammette un aperto non vuoto $U \subset \mathrm{Spec}(A)$ non denso.