1. Vero o falso?
   (a) il prodotto tensoriale di due gruppi abeliani finiti è finito.
   (b) il prodotto tensoriale di due gruppi abeliani finitamente generati è finitamente generato.

2. Siano A un gruppo abeliano divisibile e B un gruppo abeliano di torsione. Dimostrare che $A \otimes_{\mathbf{Z}} B = 0$.

3. Sia k un campo e sia $R = k[X]/(X^2)$. Sia $I \subset R$ l'ideale generato da X e sia M l'R-modulo $R/(X)$. Dimostrare che $I \otimes_R M$ non è zero, mentre $IM = 0$.

4. Sia p un primo e sia $R = \mathbf{F}_p[X]$. Per $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ sia $R_n = R/(X^n - 1)$. Per $n, m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ determinare la cardinalità di $R_n \otimes R_m$.

5. Sia p un primo e sia $k = \mathbf{F}_p(X)$ il campo delle funzioni razionali in X. Sia $K = k(\sqrt[p]{X})$. Dimostrare che $K \otimes_k K$ è un k-algebra che contiene elementi nilpotenti non nulli.

6. Sia A un gruppo abeliano. Definiamo $A \wedge A$ come il gruppo $(A \otimes_{\mathbf{Z}} A)/B$, dove B è il sottogruppo generato dai tensori $a \otimes a$, $a \in A$. Scriviamo $a \wedge b$ per l'immagine di $a \otimes b$ in $A \wedge A$.
   (a) Dimostrare che $b \wedge a = -(a \wedge b)$.
   (b) Far vedere che $A \wedge A = 0$ quando A è ciclico.
   (c) Sia p un numero primo e sia $A = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Determinare $A \wedge A$.

7. (a) Sia R un anello e sia A un R-algebra. Per ogni polinomio $f \in R[X]$, esibire un isomorfismo naturale di A-algebre fra $(R[X]/(f)) \otimes_R A$ e $A[X]/(f)$.
   (b) Esibire divisori di zero nella $\mathbf{R}$-algebra $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

8. Sia R un anello, sia M un R-modulo finitamente presentato e sia N_ι, $(\iota \in I)$ una famiglia di R-moduli. Dimostrare che il morfismo naturale
$$M \otimes_R (\prod_{\iota \in I} N_i) \longrightarrow \prod_{\iota \in I} (M \otimes_R N_i)$$
è un isomorfismo di R-moduli.

9. Sia p un numero primo e G un gruppo di ordine p. Sia R l'algebra gruppale $\mathbf{F}_p[G]$ e sia I il nucleo dell'omomorfismo $\phi : \mathbf{F}_p[G] \longrightarrow \mathbf{F}_p$ determinata da $\phi(g) = 1$ per ogni $g \in G$. Far vedere che l'omomorfismo $f : I \otimes_R I \longrightarrow I^2$ dato da $f(x \otimes y) = xy$ è suriettiva ma non iniettiva. Esibire elementi espliciti nel nucleo di f. (Sugg. Considerare la successione esatta $0 \to I \to R \xrightarrow{\phi} \mathbf{F}_p \to 0$).