1. Per i seguenti gruppi abeliani A e B:
   (a) $A = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ e $B = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$;
   (b) $A = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ e $B = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$;
   (c) $A = B = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$;
   (d) $A = B = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$,

   esibire, se esistono, omomorfismi f e g tali che la successione
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$
   sia esatta.

2. Siano A, B sottogruppi di un gruppo commutativo C. Sia dato il diagramma commutativo
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A \cap B & \xrightarrow{i_1} & B & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle i_3} & & \downarrow{\scriptstyle i_4} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_2} & C & \xrightarrow{h} & Q & \longrightarrow & 0. \end{array}$$
   dove le mappe i_1, i_2, i_3 e i_4 sono le inclusioni. Supponiamo che le sue righe siano esatte. Dimostrare che f è iniettiva.

3. Sia R un anello commutativo con 1 e siano $I, J \subset R$ due ideali che soddisfano $I + J = R$. Costruire un isomorfismo di R-moduli
$$I \oplus J \xrightarrow{\cong} IJ \oplus R.$$

4. Sia R il sottoanello di $\mathbf{C}$ dato da $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-6}] = \{a + b\sqrt{-6} : a, b \in \mathbf{Z}\}$. Siano I l'ideale $(2, \sqrt{-6})$ e J l'ideale $(3, \sqrt{-6})$ di R.
   (a) Dimostrare che $I + J = R$.
   (b) Dimostrare che IJ è principale.
   (c) Esibire un isomorfismo $I \longrightarrow J$ di R-moduli.
   (d) Dimostrare che I e J sono R-moduli proiettivi non liberi.

5. (Lemma di Schanuel) Sia R un anello e siano
$$0 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow B \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow P' \longrightarrow B \longrightarrow 0$$
   due successioni esatte di R-moduli. Supponiamo che P e P' siano moduli proiettivi. Allora gli R-moduli $A \times P'$ e $A' \times P$ sono isomorfi.

6. Sia k un campo e sia $R = k^{\mathbf{Z}}$ l'anello delle funzioni $f : \mathbf{Z} \longrightarrow k$. Sia $I = \{f \in R : f(x) = 0 \text{ per quasi ogni } x \in \mathbf{Z}.\}$.
   (a) Dimostrare che I è un ideale di R.
   (b) Dimostrare che R è un R-modulo iniettivo.
   (c) Dimostrare che I non è iniettivo, ma è proiettivo.