1. (a) Per ogni $\overline{x} \in \mathbf{Z}_{13}^*$ calcolare l'ordine di $\overline{x}$ nel gruppo moltiplicativo $\mathbf{Z}_{13}^*$.
   (b) Per ogni $\overline{x} \in \mathbf{Z}_{13}$ calcolare l'ordine di $\overline{x}$ nel gruppo additivo $\mathbf{Z}_{13}$.

2. (a) Supponiamo che $n \in \mathbf{Z}_{>1}$ ha la proprietà che $\mathrm{mcd}(n, 10) = 1$. Determinare la lunghezza del periodo dell'espansione decimale di $\frac{1}{n}$.
   (b) Determinare i numeri naturali $n \in \mathbf{Z}_{>1}$ con $\mathrm{mcd}(n, 10) = 1$ che hanno la proprietà che il periodo dell'espansione decimale di $\frac{1}{n}$ ha lunghezza ≤ 6.

3. Sia n un numero naturale e sia $x \in \mathbf{Z}$ con $\mathrm{mcd}(x, n) = 1$. Sia a l'ordine di $x \in \mathbf{Z}_n^*$ e sia $k \in \mathbf{Z}$. Dimostrare che l'ordine di $x^k \in \mathbf{Z}_n^*$ è uguale a $a/\mathrm{mcd}(a, k)$.

4. Sia n un numero naturale dispari.
   (a) Dimostrare che $H = \{\overline{x} \in \mathbf{Z}_n^* : \overline{x}^2 = \overline{1}\}$ è un sottogruppo di $\mathbf{Z}_n^*$.
   (b) Dimostrare che $\#H = 2^d$ dove d è il numero di divisori primi di n.
   (c) Determinare H per $n = 91$.

5. Un numero naturale $n \in \mathbf{Z}_{>1}$ si dice *numero di Carmichael* se *non* è primo, ma soddisfa $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ per ogni $x \in \mathbf{Z}$ con $\mathrm{mcd}(x, n) = 1$.
   (a) Dimostrare che 1105 e 1729 sono numeri di Carmichael.
   (b) Supponiamo che $n \in \mathbf{Z}_{>1}$ abbia la proprietà che per ogni divisore primo p di n si ha che p^2 non divide n, ma $p - 1$ divide $n - 1$. Far vedere che n è primo oppure n è un numero di Carmichael.

6. Dimostrare che non esiste nessun $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ tale che $\mathbf{Z}_n^* \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.

7. (a) Dimostrare che $\mathbf{Z}_{60}^* \cong \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.
   (b) Esibire elementi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z}_{60}^*$ di ordine 4, 2, 2 rispettivamente, con la proprietà che ogni elemento di $\mathbf{Z}_{60}^*$ è prodotto di potenze di x_1, x_2, x_3.

8. (a) Trovare le soluzioni in $\mathbf{Z}_7$ dell'equazione $x^2 = 2$.
   (b) Trovare le soluzioni in $\mathbf{Z}_{17}$ dell'equazione $x^2 = 2$.
   (c) Trovare le soluzioni in $\mathbf{Z}_{119}$ dell'equazione $x^2 = 2$.

9. (a) Trovare le soluzioni in $\mathbf{Z}_{49}$ dell'equazione $x^2 = 2$.
   (b) Trovare le soluzioni in $\mathbf{Z}_{343}$ dell'equazione $x^2 = 2$.
   (c) Trovare le soluzioni in $\mathbf{Z}_{21}$ dell'equazione $x^2 = 2$.

PER I SEGUENTI ESERCIZI È UTILE UN COMPUTER.

10. Siano $n = 56492375429317645$ e $m = 986764526573$.
    (a) Far vedere che $\mathrm{mcd}(n, m) = 1$;
    (b) Calcolare $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ tali che $\lambda n + \mu m = 1$.
    (c) Calcolare $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ tali che $\lambda n + \mu m = 2$.

11. Sia $n = 10001 = 73 \cdot 137$.
    (a) Fattorizzare $\varphi(n)$.
    (b) Esibire, se esiste, un $\overline{x} \in \mathbf{Z}_n^*$ di ordine 17.
    (c) Esibire, se esiste, un $\overline{x} \in \mathbf{Z}_n^*$ di ordine 8.

12. (a) Trovare le soluzioni dell'equazione $x^2 + x - 2 = 0$ in $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_4$, $\mathbf{Z}_8$, ... e in $\mathbf{Z}_{1024}$.
    (b) Calcolare una radice quadrata di $-7 \in \mathbf{Z}_{1024}^*$. (Sugg. Usare la parte (a)).