Proposition. *Sia G un gruppo che agisce in modo 2-transitivo su un insieme X. Sia H il stabilizzatore di un elemento $x \in X$.*
(a) Per ogni $\sigma \in G - H$ si ha che $G = H \cup H\sigma H$.
(b) il sottogruppo H è massimale.
(c) Ogni sottogruppo normale $N \subset G$ non banale agisce in modo transitivo su X.

Proof. Il fatto che l'azione di G è 2-transitiva vuol dire che per ogni due elementi x_1, x_2 di X e ogni due elementi y_1, y_2 di X esiste $\sigma \in G$ con

$$\sigma(x_1) = y_1,$$
$$\sigma(x_2) = y_2.$$

Ricordiamo che $H\sigma H = \{h\sigma h' : h, h' \in H\}$. Per dimostrare a parte (a) sia $\sigma \in G - H$. Allora x e $\sigma(x)$ sono distinti. Sia $\tau \in G$ arbitrario. Se $\tau \in H$, anche $\tau \in H \cup H\sigma H$. Supponiamo quindi che $\tau \notin H$. E quindi anche x e $\tau(x)$ sono distinti. Per la 2-transitività dell'azione, esiste $\rho \in G$ tale che

$$\rho(x) = x,$$
$$\rho\sigma(x) = \tau(x).$$

E quindi sia ρ che $\rho' = \tau^{-1}\rho\sigma$ appartengono a H. Ne segue che $\tau = \rho\sigma{\rho'}^{-1}$ sta in $H\sigma H$ come richiesta.

Per la parte (b) sia $H \subset K \subset G$ un sottogruppo fra H e G. Supponiamo che $H \neq K$ e sia $\sigma \in K - H$. Allora G è uguale a $H \cup H\sigma H$ ed è quindi contenuto in K. Per dimostrare (c), sia N un sottogruppo normale non banale. Allora, abbiamo che $\sigma(x) \neq x$ per qualche $x \in X$ e $\sigma \in G$. Ora scegliamo $y, z \in X$ distinti. Per la 2-transitività dell'azione di G, esiste $\rho \in G$ con

$$\rho(x) = y$$
$$\rho\sigma(x) = z,$$

e quindi l'elemento $\rho\sigma\rho^{-1}$ di N manda y in z. Questo implica che N è transitiva, come richiesta.

Proposition. *Siano $H \subset G$ e X come sopra. Supponiamo che esiste un sottogruppo A normale di H con la proprietà che i sottogruppi gAg^{-1} con $g \in G$ generano G. Allora ogni sottogruppo normale non banale di G contiene il sottogruppo dei commutatori $[G, G]$.*

Proof. Sia $N \subset G$ un sottogruppo normale non banale. Allora abbiamo inclusioni $H \subset NH \subset G$. Non è possibile che $NH = H$, perchè in quel caso N è contenuto in H, contraddicendo la parte (c) della proposizione precedente che dice che N agisce transitivamente su X. Per la parte (a) il sottogruppo H è massimale ed abbiamo quindi che $G = HN$. Ne segue che AN è un sottogruppo normale di G. Per ogni $g \in G$ il sottogruppo gAg^{-1} è quindi anche contenuto in AN.

Poiché i sottogruppi gAg^{-1} con $g \in G$ generano G, abbiamo che $G = AN$. Questo implica che $G/N = AN/N = A/(A \cap N)$ è abeliano e quindi si ha che $[G, G] \subset N$ come richiesto.

Corollario. *Il gruppo* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_q)$ *è semplice per* $q > 3$.

Proof. Sia X l'insieme $\mathbf{P}_1(\mathbf{F}_q)$ dei $\mathbf{F}_q$-punti della retta proiettiva. L'azione di $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_q)$ su X è 2-transitiva. Il stabilizzatore del punto all'infinito è

$$H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} : a \in \mathbf{F}_q^* \text{ e } b \in \mathbf{F}_q\}.$$

Il sottogruppo

$$A = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \; b \in \mathbf{F}_q\}$$

è normale in H.

È ben noto che G è generato da A e da $\tau A \tau^{-1}$ dove $\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Questo fatto assieme alla formula

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (a^2-1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dimostra che $[G, G] = G$. Infatti, la condizione $q > 3$ implica che esiste $a \in \mathbf{F}_q^*$ con $a^2 \neq 1$.