Se scriviamo $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, è sottointeso che $p, q \in \mathbf{Z}$ con $q > 0$ e $\mathrm{mcd}(p, q) = 1$.

Proposizione. *Sia $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ algebrico di grado n. Allora esiste $c > 0$ tale che*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}, \qquad \textit{per ogni } \tfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}.$$

Dimostrazione. Sia $f \in \mathbf{Z}[X]$ il polinomio minimo di α. Si ha che $\deg f = n \geq 2$ e che $f(\frac{p}{q}) \neq 0$ per ogni $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. Si ha quindi che $|f(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^n}$, per ogni $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. Sia $M = \sup\{|f'(t)| : t \in [\alpha - 1, \alpha + 1]\}$. Poiché $d \geq 2$, il numero reale M non è zero. Sia $c = \min(1, \frac{1}{M})$.

Sia $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$. Se $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq 1$, allora sicuramente anche $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^n}$. Se invece $|\alpha - \frac{p}{q}| < 1$, abbiamo che

$$f(\frac{p}{q}) - f(\alpha) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) f'(t), \qquad \text{per qualche } t \in [\alpha - 1, \alpha + 1].$$

Siccome $f(\alpha) = 0$ e $f(\frac{p}{q}) \geq \frac{1}{q^n}$, allora vale

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^n |f'(t)|} \geq \frac{c}{q^n},$$

come richiesto.

Corollario. $\alpha = \sum_{k \geq 1} 10^{-k!}$ *è trascendente.*

Dimostrazione. Innanzitutto si ha che $\alpha \notin \mathbf{Q}$, perché la sua espansione decimale non è periodica. Sia $m > 1$ e sia $\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{m} 10^{-k!}$. Quindi $q = 10^{m!}$. Abbiamo che

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{10^{(m+1)!}} + \frac{1}{10^{(m+2)!}} + \ldots \leq \frac{2}{10^{(m+1)!}} = \frac{2}{q^{m+1}}.$$

Poiché per ogni $n \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$ e $c > 0$ esiste sempre un intero $m \geq 2$ con $\frac{2}{q^{m+1}} < \frac{c}{q^n}$, la proposizione implica che α è trascendente.