

1. Sia V il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$. Sia $f : V \rightarrow V$ l'applicazione che scambia le prime due coordinate. Far vedere che f è lineare. Determinare una base di V e la matrice rappresentativa di f rispetto a questa base in dominio e codominio (cioè sia nello spazio di partenza che in quello di arrivo).
2. Sia $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data dalla moltiplicazione per $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Far vedere che i vettori $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
 - (b) Calcolare la matrice rappresentativa di g rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ in dominio e codominio.
3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare che scambia $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
 - (a) Dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti (e quindi la definizione di f ha senso).
 - (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ in dominio e codominio.
 - (c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.
4. Sia $\mathbf{v}$ un vettore in $\mathbf{R}^3$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ (prodotto vettoriale).
 - (a) Dimostrare che f è lineare.
 - (b) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f .
 - (c) Sia $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ una base di $\mathbf{R}^3$ e sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a questa base in dominio e codominio. Dimostrare che la traccia di A è zero (la *traccia* $\text{Tr}(A)$ della matrice $A = (a_{ij})$ è data da $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$).
5. Siano $z = 2 + 2i$ e $w = 2i$ in $\mathbf{C}$.
 - (a) Calcolare $(z - w)^2$, $2z^2 + 1/w$, $z^{-1} + \bar{w}$. Dare la risposta nella forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbf{R}$.
 - (b) Determinare la parte immaginaria di zw , z^{-1} e $\bar{w}^2$.
 - (c) Calcolare gli argomenti di z , zw , $z/\bar{z}$ e z^2 .
6. Determinare le soluzioni $z, w \in \mathbf{C}$ del seguente sistema lineare. Dare la risposta nella forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} iz + 2w &= 1 + i; \\ 3z + (1 + i)w &= 2. \end{cases}$$

7. Disegnare gli zeri in $\mathbf{C}$ dei polinomi $X^2 + X + 2$, $X^3 + X$, $X^4 - 2$.
8. Disegnare gli insiemi di numeri complessi z che soddisfano:

(a) $z = -\bar{z}$;	(d) $ z = z$;
(b) $\text{Arg}(z) = 0$;	(e) $1 < z < 3$;
(c) $ z = 2$;	(f) $1 < z - 2i < 2$.