

1. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso affermativo, calcolarne la matrice inversa:

$$(a) \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calcolare

$$(a) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \det \begin{pmatrix} 100 & 73 \\ 137 & 100 \end{pmatrix}; \quad (d) \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\varphi \in \mathbf{R}).$$

3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$.
 (b) Calcolare $\det(AB)$, $\det(BA)$ e $\det(A^{-1})$.
 (c) Calcolare $\det(A + B)$.
4. Sia $n \geq 1$ e sia S_n l'insieme delle permutazioni di $X = \{1, 2, \dots, n\}$.
 (a) Sia $\tau \in S_n$ la permutazione data da $\tau(i) = i + 1$ per $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ mentre $\tau(n) = 1$. Determinare il segno di τ .
 (b) Sia $\sigma \in S_n$ la permutazione data da $\sigma(i) = n + 1 - i$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Determinare il segno di σ .
5. Sia D la matrice 10×10

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 \\ 11 & 12 & \cdots & 19 & 20 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 81 & 82 & \cdots & 89 & 90 \\ 91 & 92 & \cdots & 99 & 100 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcolare il determinante di D .
 (b) Calcolare il rango di D .
6. Sia $f : \mathbf{R}^{10} \longrightarrow \mathbf{R}^{10}$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice D dell'esercizio 5.
 (a) Determinare una base per l'immagine di f .
 (b) Determinare una base per il nucleo di f .