1. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -2x-2y+2z \end{pmatrix}$. Calcolare una base per $\ker(g)$ e una base per $\mathrm{im}(g)$.

2. Calcolare le dimensioni di $\ker(f)$ ed $\mathrm{im}(f)$ per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ data da
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

3. Determinare il rango delle seguenti matrici
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Sia A la matrice 5×5 data da
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Sia $f : \mathbf{R}^5 \longrightarrow \mathbf{R}^5$ data dalla moltiplicazione per A. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_5$ la base canonica di $\mathbf{R}^5$. Far vedere che $f(\mathbf{e}_1) = 0$ e che
$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}; \qquad \text{per } i = 2, 3, 4, 5.$$

   (b) Per $m > 0$, sia f^m l'iterata m-esima di f, cioè $f^m(\mathbf{x}) = \underbrace{f(f(\cdots f(}_{m \text{ volte}}\mathbf{x})\cdots))$ e sia $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m \text{ volte}}$. Per ogni $m > 0$, calcolare la matrice A^m e determinare il nucleo e l'immagine di f^m.

5. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcolare $W = \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
   (b) Esibire un complemento di W *in* $\ker(f)$.