

1. “Diagonalizzare” le seguenti forme quadratiche. In altre parole, trovare una matrice ortogonale U tale che il cambiamento di variabili

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

porti la forma quadratica nella forma $\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2$.

- (a) $X^2 + YX$;
 - (b) X^2 ;
 - (c) XY .
2. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica;
 - (a) $2X^2 + 2XY + 2XZ + 2Y^2 + 2YZ + 2Z^2$;
 - (b) $X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2$;
 - (c) $X^2 + Y^2 + Z^2 + 4(XY + XZ - YZ)$;
 - (d) $X(3Y + 4Z)$.
 3. Dire di che tipo di conica in $\mathbf{R}^2$ si tratta:
 - (a) $XY - 2X = 0$;
 - (b) $X^2 + XY + Y^2 + X + Y + 1 = 0$;
 - (c) $X^2 + 2XY + Y^2 - 2X + 2Y + 1 = 0$;
 - (d) $3X^2 - 8XY - 3Y^2 + 10 = 0$;
 - (e) $2X^2 - 3XY - 2Y^2 - X + 2Y = 0$;
 - (f) $5X^2 + 4XY + 2Y^2 - 4X - 4Y + 2 = 0$.
 4. Disegnare la conica in $\mathbf{R}^2$ di equazione $X^2 - 4XY - 2Y^2 = 1$.
 5. Determinare il polinomio caratteristico della tavola pitagorica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che la matrice della tavola pitagorica è diagonalizzabile.