

1. Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ed  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vettori in  $\mathbf{R}^3$ .

(a) Calcolare il prodotto vettoriale  $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ .

(b) Calcolare il volume del parallelepipedo  $\{t\mathbf{p} + s\mathbf{q} + u\mathbf{r} : t, s, u \in [0, 1]\}$ .

2. In  $\mathbf{R}^3$  siano dati i seguenti punto  $\mathbf{p}$  e retta  $r$ :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (t \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza di  $\mathbf{p}$  da  $r$ .

3. In  $\mathbf{R}^3$  siano dati i seguenti punto  $\mathbf{p}$  e piano  $\pi$ :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (t, s \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza di  $\mathbf{p}$  da  $\pi$ .

4. In  $\mathbf{R}^3$  sia  $\pi$  il piano dato da  $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1 = 0$  e siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(a) Calcolare un'equazione cartesiana del piano  $\pi_1$  passante per  $\mathbf{p}$  e parallelo a  $\pi$ .

(b) Calcolare un'equazione parametrica della retta  $r$  passante per  $\mathbf{q}$  e ortogonale  $\pi_1$ .

(c) Calcolare un'equazione parametrica della retta  $\ell$  passante per  $\mathbf{p}$  e ortogonale  $\pi$ .

(d) Calcolare la distanza  $d(r, \ell)$ .

5. Sia  $S$  la sfera di equazione  $x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = 4$  e sia  $r$  la retta di equazione cartesiana:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare i punti d'intersezione  $P$  e  $Q$  di  $S$  con  $r$ .

(b) Scrivere l'equazione del piano  $\pi_1$  tangente alla sfera in  $P$ .

(c) Scrivere l'equazione del piano  $\pi_2$  tangente alla sfera in  $Q$ .

6. Sia  $S$  la sfera di equazione  $(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 9$ . Siano  $\pi$  il piano di equazione  $x_1 = 1$  e  $\pi'$  quello di equazione  $-2x_1 + x_3 + 1 = 0$ .

(a) Calcolare la distanza da  $\pi$  al centro di  $S$  e la distanza da  $\pi'$  al centro di  $S$ .

(b) Verificare che l'intersezione fra  $\pi$  ed  $S$  è una circonferenza e calcolarne il raggio. Fare la stessa cosa per  $\pi'$ .

7. Sia  $n \geq 0$  e siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due vettori in  $\mathbf{R}^n$ . Dimostrare

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$