Geometria 11. Molteplicità algebrica e geometrica, isometrie. Roma, 5 dicembre 2024.

1. Delle seguenti matrici determinare gli autovalori in $\mathbf{R}$ e le loro molteplicità algebrica e geometrica. Dire se sono diagonalizzabili o meno.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Delle seguenti matrici determinare gli autovalori in $\mathbf{R}$ e le loro molteplicità algebrica e geometrica. Dire se sono diagonalizzabili o meno.

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $\mathbf{v}$ il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$.
   (a) Esibire la formula per la traslazione di passo $\mathbf{v}$.
   (b) Esibire le formule per la rotazione R di centro l'origine ed angolo $\pi/3$.
   (c) Esibire le formule per la rotazione R' di centro $\mathbf{v}$ ed angolo $\pi/3$.

5. Trovare la formula per la rotazione di angolo $\pi/3$ intorno alla retta $\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R}\}$.

6. Trovare la formula per la rotazione di angolo $\pi/3$ intorno alla retta $\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R}\}$.

7. (a) Determinare una base del piano W di equazione $x + y = 0$ in $\mathbf{R}^3$.
   (b) Determinare la formula per la simmetria ortogonale rispetto al piano W.

8. Sia W un piano in $\mathbf{R}^3$ passante per l'origine e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale su W.
   (a) Dimostrare che $f^2 = f$. Cioè che $f(f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$.
   (b) Dimostrare che gli autovalori di f sono 0 e 1.
   (c) Descrivere gli autospazi di f per W dato dall'equazione $x + y + z = 0$.

9. Sia $W \subset \mathbf{R}^3$ un piano passante per l'origine. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la simmetria ortogonale rispetto al piano W (ricordiamo che f è lineare). Calcolare la traccia di f.