Geometria 10. Autovalori, autovettori, cambiamento di base. Roma, 28 novembre 2024.

1. Determinare gli autovalori delle seguenti matrici. Determinare gli autospazi.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di f.
(b) Per ogni autovalore di f, determinare l'autospazio corrispondente.

3. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per una certa matrice invertibile A.
(a) Dimostrare che gli autovalori di A sono non nulli.
(b) Dimostrare che se λ è autovalore di A, allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1}.

4. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$.
(a) Dimostrare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è una base di $\mathbf{R}^3$ e che f è lineare.
(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).
(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

5. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ un'applicazione lineare che ha i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ come autovettori di autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ rispettivamente.
(a) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).
(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

6. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data dalla moltiplicazione per la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.
Dimostrare che $\mathbf{R}^3$ ammette una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di autovettori di A. Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

7. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000}.