

1. Sia $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ -2x - 2y + 2z \end{pmatrix}$. Calcolare una base per $\ker(g)$ e una base per $\text{im}(g)$.
2. Sia A la matrice 5×5 data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Sia $f : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$ data dalla moltiplicazione per A . Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_5$ la base canonica di $\mathbf{R}^5$. Far vedere che $f(\mathbf{e}_1) = 0$ e che

$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}; \quad \text{per } i = 2, 3, 4, 5.$$

- (b) Per $m > 0$, sia f^m l'applicazione $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m \text{ volte}}$ e sia $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ volte}}$. Per ogni $m > 0$, calcolare la matrice A^m e determinare il nucleo e l'immagine di f^m .

3. Siano $n, m \geq 1$ e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} & b_m \end{pmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ammette una soluzione se e solo se $\mathbf{b}$ è contenuto nello span delle colonne di A .

- (b) (Rouché-Capelli) Dimostrare che il sistema di equazioni ammette una soluzione se e solo se il rango di A' è uguale al rango di A .

4. Sia $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcolare $W = \ker(f) \cap \text{Im}(f)$.
- (b) Esibire un complemento di W in $\ker(f)$.

5. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso affermativo, calcolarne la matrice inversa:

$$(a) \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$