

1. “Diagonalizzare” le seguenti forme quadratiche. In altre parole, trovare una matrice ortogonale  $U$  tale che il cambiamento di variabili

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

porti la forma quadratica nella forma  $\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2$ .

- (a)  $X^2 + YX$ ;
  - (b)  $X^2$ ;
  - (c)  $XY$ .
2. Determinare una trasformazione ortogonale di  $\mathbf{R}^3$  che diagonalizzi la forma quadratica;
- (a)  $2X^2 + 2XY + 2XZ + 2Y^2 + 2YZ + 2Z^2$ ;
  - (b)  $X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2$ ;
  - (c)  $X^2 + Y^2 + Z^2 + 4(XY + XZ - YZ)$ ;
  - (d)  $X(3Y + 4Z)$ .
3. Dire di che tipo di conica in  $\mathbf{R}^2$  si tratta:
- (a)  $XY - 2X = 0$ ;
  - (b)  $X^2 + XY + Y^2 + X + Y + 1 = 0$ ;
  - (c)  $X^2 + 2XY + Y^2 - 2X + 2Y + 1 = 0$ ;
  - (d)  $3X^2 - 8XY - 3Y^2 + 10 = 0$ ;
  - (e)  $2X^2 - 3XY - 2Y^2 - X + 2Y = 0$ ;
  - (f)  $5X^2 + 4XY + 2Y^2 - 4X - 4Y + 2 = 0$ .
4. Disegnare la conica in  $\mathbf{R}^2$  di equazione  $X^2 - 4XY - 2Y^2 = 1$ .
5. Una matrice quadrata reale  $M = (m_{ij})$  si dice antisimmetrica se  $m_{ij} = -m_{ji}$  per ogni  $i, j$ . Sia  $\lambda \in \mathbf{C}$  un autovalore di una matrice antisimmetrica. Dimostrare che la parte reale di  $\lambda$  è zero.
6. Sia  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (a) Mostrare che  $A$  è una matrice ortogonale.
  - (b) Sia  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione data da  $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$  per  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ . Determinare cosa fa geometricamente  $f$ .
7. Sia  $n \geq 2$ . Determinare una trasformazione ortogonale di  $\mathbf{R}^n$  che diagonalizzi la forma quadratica

$$X_1(X_2 + X_3 + \dots + X_n).$$