1. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data dalla moltiplicazione per la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Determinare basi per il nucleo e per l'immagine di f.

2. Sia V il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$. Sia $f : V \longrightarrow V$ l'applicazione che cambia i segni dei vettori. Far vedere che f è lineare. Determinare una matrice rappresentativa di f e calcolare la sua traccia e determinante.

3. (a) Dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti.
Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare che scambia $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).
(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

4. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo in $\mathbf{R}^3$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ (prodotto vettoriale).
(a) Dimostrare che f è lineare.
(b) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f.

5. Siano $z = 2 + 2i$ e $w = 2i$ in $\mathbf{C}$.
(a) Calcolare $(z - w)^2$, $2z^2 + 1/w$, $z^{-1} + \overline{w}$. Dare la risposta nella forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbf{R}$.
(b) Determinare la parte immaginaria di zw, z^{-1} e $\overline{w}^2$.
(c) Calcolare gli aromenti di z, zw, $z/\overline{z}$ e z^2.

6. Determinare le soluzioni $z, w \in \mathbf{C}$ del seguente sistema lineare. Dare la risposta nella forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbf{R}$.
$$\begin{cases} iz + 2w & = & 1 + i; \\ 3z + (1 + i)w & = & 2. \end{cases}$$

7. Disegnare gli zeri in $\mathbf{C}$ dei polinomi $X^2 + X + 2$, $X^3 + X$, $X^4 - 2$.

8. Disegnare gli insiemi di numeri complessi z che soddisfano:
(a) $z = -\overline{z}$;
(b) $\mathrm{Arg}(z) = 0$;
(c) $|z| = 2$;
(d) $|z| = z$;
(e) $1 < |z| < 3$;
(f) $1 < |z - 2i| < 2$.

9. Esibire una base ortogonale dello sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato dall'equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

10. Esistono tre vettori non nulli $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ in $\mathbf{R}^2$ con la proprietà che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0$? Se esistono, esibirne un esempio. Se no, spiegare perché no.

11. Dimostrare che per ogni $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ si ha che $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.