

1. Trovare equazioni cartesiane per i sottospazi W :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad W &= \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^3; & \text{(b)} \quad W &= \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^3; \\ \text{(c)} \quad W &= \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^2. & \text{(d)} \quad W &= \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

2. Esibire basi per gli spazi vettoriali W dell'Esercizio 1.

3. Siano $V, W \subset \mathbf{R}^4$ due sottospazi dati da

$$V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 + x_3 = 0, x_2 + 2x_3 = 0\right\}.$$

- (a) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
- (b) Calcolare le dimensioni di V , W e $V \cap W$.
- (c) Calcolare la dimensione $\dim(V + W)$.

4. Siano dati i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x - y + z - w = 0\right\}.$$

- (a) Determinare una base per $U + V$ e una base per $U \cap V$;

- (b) Determinare se il vettore $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap V$.

5. Siano $V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ e $W = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}$ sottospazi di $\mathbf{R}^3$.

- (a) Esibire una base di V e una base di W . Calcolare la dimensione di V e di W .
- (b) Calcolare $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$.

6. Sia V uno spazio vettoriale e siano W e W' sottospazi di V . Dimostrare che $W \cup W'$ è un sottospazio di V se e solo se $W \subset W'$ oppure $W' \subset W$.