1. Per ogni matrice determinare gli autovalori dell'applicazione lineare corrispondente. Determinare gli autospazi.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad \text{(c)}\ \begin{pmatrix}1&-1\\5&-1\end{pmatrix}\qquad \text{(d)}\ \begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\4&2&-3\end{pmatrix}.$$

2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare il polinomio caratteristico di f.
   (b) Per ogni autovalore di f, determinare l'autospazio corrispondente.

3. Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per una certa matrice invertibile A.
   (a) Dimostrare che gli autovalori di A sono non nulli.
   (b) Dimostrare che se λ è autovalore di A, allora λ^{-1} è autovalore di A^{-1}.

3. Delle seguenti matrici determinare gli autovalori in $\mathbf{R}$ e le loro molteplicità algebrica e geometrica.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad \text{(c)}\ \begin{pmatrix}1&-1\\5&-1\end{pmatrix}\qquad \text{(d)}\ \begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\4&2&-3\end{pmatrix}.$$

4. Delle seguenti matrici determinare gli autovalori in $\mathbf{R}$ e le loro molteplicità algebrica e geometrica.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\quad \text{(d)}\ \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

5. Sia W un piano in $\mathbf{R}^3$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale su W.
   (a) Dimostrare che $f^2 = f$. Qua f^2 indica la composizione $f \circ f$.
   (b) Dimostrare che gli autovalori di f sono 0 e 1.
   (c) Descrivere gli autospzi di f.

6. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{pmatrix}4&4&4&4&4&4\\4&4&4&4&4&4\\4&4&4&4&4&4\\4&4&4&4&4&4\\4&4&4&4&4&4\\4&4&4&4&4&4\end{pmatrix}.$$