1. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -2x-2y+2z \end{pmatrix}$. Calcolare una base per $\ker(g)$ e una base per $\mathrm{im}(g)$.

2. Sia A la matrice $n \times n$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ data dalla moltiplicazione per A. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base canonica di $\mathbf{R}^n$. Far vedere che $f(\mathbf{e}_1) = 0$ e che

$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}; \qquad \text{per } i = 2, 3, \ldots, n.$$

   (b) Per $m > 0$, sia f^m l'applicazione $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ volte}}$ e sia $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m \text{ volte}}$. Per ogni $m > 0$, calcolare la matrice A^m e determinare il nucleo e l'immagine di f^m.

3. Siano $n, m \geq 1$ e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{nm} & b_m \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{n1}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}x_1 & + & \ldots & + & a_{nm}x_n & = & b_m \end{cases}$$

   ammette una soluzione se e solo se $\mathbf{b}$ è contenuto nello span delle colonne di A.

   (b) (Rouché-Capelli) Dimostrare che il sistema di equazioni ammette una soluzione se e solo se il rango di A' è uguale al rango di A.

4. Sia $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e sia $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4\}$.

   (a) Osservare che $W \subset V$ (!) e determinare la dimensione di W.

   (b) Esibire un complemento W' di W in $\mathbf{R}^4$.

   (c) Dimostrare che per ogni complemento W' si ha che $\dim(V \cap W') = 1$.