

1. Calcolare i seguenti prodotti di matrici

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{(b)} (1 \ 2 \ 3 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 3 \ 4) \\
 \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

2. Calcolare i prodotti AB e BA dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Quali applicazioni sono lineari?

- (a) $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ data da $g(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.
 (b) $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

4. Calcolare le dimensioni di $\ker(f)$ ed $\text{im}(f)$ per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

5. Sia $\mathbf{R}[X]$ l'insieme dei polinomi nella variabile X .

- (a) Verificare che $\mathbf{R}[X]$ con la solita somma e la solita moltiplicazione per i numeri reali, è uno spazio vettoriale.
 (b) Dimostrare che la dimensione di $\mathbf{R}[X]$ è infinita.
 Sia $h : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$ data da $h(p) = \frac{dp}{dX}$ per $p \in \mathbf{R}[X]$.
 (c) Calcolare $d(X^n)$ per ogni $n \geq 0$.
 (d) Dimostrare che h è un'applicazione lineare e determinare $\ker(h)$ e $\text{im}(h)$.

2. Sia R la rotazione intorno all'origine di $\mathbf{R}^2$ in senso antiorario di un angolo di 60° .

- (a) Trovare le formule che descrivono la trasformazione R e calcolare $R(Q)$ dove $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ e sia R' la rotazione intorno a P in senso antiorario di un angolo di 90° .

- (b) Trovare le formule che descrivono la trasformazione R' e calcolare $R'(Q)$ dove $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.