

1. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$

- (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
- (b) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\mathbf{R}^3 = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
- (c) Esibire un terzo vettore $\mathbf{v}'_3$ tale che $\mathbf{R}^3 \neq \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_3\}$.

2. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$.

$$(a) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbf{R}^5;$$

$$(b) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0 \right\} \subset \mathbf{R}^4;$$

$$(c) \ W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbf{R}^3;$$

- 3. (a) Esibire basi per gli spazi vettoriali W dell'Esercizio 2.
- (b) Determinare le dimensioni degli spazi vettoriali W dell'Esercizio 2.

4. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ dato da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\},$$

e sia W' il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ dato da

$$W' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Determinare la dimensione di $W \cap W'$.

- 5. Sia V uno spazio vettoriale sia $W \subset V$ un suo sottospazio. Dimostrare che
 - (a) $\dim W \leq \dim V$;
 - (b) $V = W$ se e solo se $\dim W = \dim V$.