

1. Sia $S \subset \mathbf{P}^1$ l'insieme dato da $S = \{(6 : 10), (11 : 7), (21 : 35)\}$. Quanti punti contiene S ?
2. Siano $P = (x_0 : x_1)$ e $Q = (y_0 : y_1)$ due punti di \mathbf{P}^1 . Dimostrare che P e Q sono lo stesso punto se e soltanto se si ha $\det \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$.
3. Sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 + x_1 - 4x_2 = 0$ e sia $P \in \mathbf{P}^2$ il punto $(4:0:1)$.
 - (a) Dimostrare che la retta r passa per il punto P .
 - (b) Esibire altre due punti della retta r .
 - (c) Esibire altre due rette che passano per P .
4. Siano $P = (1:2:0)$ e $Q = (2:0:1)$ due punti in \mathbf{P}^2 e sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$.
 - (a) Calcolare un'equazione per la retta s passante per P e Q .
 - (b) Calcolare il punto di intersezione $r \cap s$.
5. Sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 + 2x_1 = 0$ e sia $s \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $2x_0 + x_3 = 0$. Sia $P \in \mathbf{P}^2$ il punto $(1:-1:2)$.
 - (a) Calcolare il punto Q di intersezione $r \cap s$.
 - (b) Calcolare un'equazione per la retta t passante per P e Q .
6. Sia l la retta passante per $(0:1:-1)$ e $(2:1:0)$ e sia m la retta passante per $(0:-1:1)$ e $(2:1:0)$. Determinare $l \cap m$.
7. (a) Decidere se i tre punti $(1:2:3)$, $(1:0:-1)$ e $(2:1:0)$ di \mathbf{P}^2 stanno su una retta o meno.
 - (b) Decidere se le tre rette di equazioni $x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0$, $x_0 - x_3 = 0$ e $2x_0 + x_1 = 0$ in \mathbf{P}^2 passano per un punto comune.
8. (a) Dimostrare che tre punti $(p_0:p_1:p_2)$, $(q_0:q_1:q_2)$ e $(r_0:r_1:r_2)$ in \mathbf{P}^2 stanno su una retta se e soltanto se si ha che

$$\det \begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} = 0.$$

- (b) Dimostrare che tre rette di equazioni $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, $b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ e $c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ passano per un punto comune se e soltanto se si ha che

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

9. Sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e sia $s \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $2x_0 - x_1 - x_2 = 0$. Trovare altre due rette nel fascio delle rette passanti per il punto di intersezione $P = r \cap s$.
10. Sia r la retta passante per $P = (1:0:-1)$ e $Q = (2:1:0)$.
 - (a) Far vedere che il punto $R = (-1:-1:-1)$ sta su r .
 - (b) Determinare $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che $R = \lambda P + \mu Q$.