1. "Diagonalizzare" le seguenti forme quadratiche. In altre parole, trovare una matrice ortogonale U tale che il cambiamento di variabili

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

porti la forma quadratica nella forma $\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2$.

   (a) $X^2 + YX$;
   (b) X^2;
   (c) XY.

2. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica;

   (a) $2X^2 + 2XY + 2XZ + 2Y^2 + 2YZ + 2Z^2$;
   (b) $X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2$;
   (c) $X^2 + Y^2 + Z^2 + 4(XY + XZ - YZ)$;
   (d) $X(3Y + 4Z)$.

3. Disegnare le seguenti coniche:

   (a) $XY - 2X = 0$;
   (b) $X^2 + XY + Y^2 + X + Y + 1 = 0$;
   (c) $X^2 + 2XY + Y^2 - 2X + 2Y + 1 = 0$;
   (d) $3X^2 - 8XY - 3Y^2 + 10 = 0$;
   (e) $2X^2 - 3XY - 2Y^2 - X + 2Y = 0$;
   (f) $5X^2 + 4XY + 2Y^2 - 4X - 4Y + 2 = 0$.

4. Dire di che tipo di quadrica in $\mathbf{R}^3$ si tratta

   (a) $X^2 = 0$;
   (b) $X^2 = 1$;
   (c) $X^2 = -1$;
   (d) $X^2 = Y$;
   (e) $XY + YZ = 0$;
   (f) $XY + YZ = 1$;
   (g) $XY + YZ = -1$;
   (h) $XY + YZ = Y$;
   (i) $X^2 + 2YZ = 1$;
   (j) $X^2 + 2YZ = 0$;
   (k) $X^2 + 2YZ = -1$;
   (l) $X^2 + Y + Z = 1$;
   (m) $X^2 + Y^2 - 2YZ + Z^2 = 0$;
   (n) $Y^2 - 4YZ + 4Z^2 = 0$;
   (o) $X^2 + Y^2 - 2YZ + 2Z^2 = 0$;
   (p) $X^2 + XY + Y^2 - Z = 1$.

5. Dire di che tipo di quadrica in $\mathbf{R}^3$ si tratta:

   (a) $X^2 + Y + Z = 0$;
   (b) $X^2 + Y + Z = 1$;
   (c) $X^2 + Y^2 + Z = 0$;
   (d) $X^2 + Y^2 + Z^2 - X - Y - Z = 0$;
   (e) $X^2 + XY - Y^2 - X - 2Y = 0$;
   (f) $XY + YZ + ZX = 1$;
   (g) $XY + YZ + ZX = 0$;
   (h) $XY + YZ + ZX = -1$.